SỔ TAY TOÁN HỌC TỪ A-Z

Chinh phục chuyên đề toán từ A-Z

Tóm tắt các định lý, tính chất và công thức toán cơ bản nhất, dễ hiểu nhất.

Mục lục

MỘT SỐ KÝ HIỆU TOÁN HỌC

=	Bằng	$a=b$
$\equiv$	Đồng nhất bằng	$a\equiv b$
$\neq$	Không bằng (khác)	$a\neq b$
$\approx$	Xấp xỉ bằng	$a\approx b$
<	Nhỏ hơn	$a<b$
>	Lớn hơn	$a>b$
$\leq$	Nhỏ hơn hoặc bằng	$a\leq b$
$\geq$	Lớn hơn hoăc bằng	$a\geq b$
$\Leftrightarrow$	Tương đương	Mệnh đề A $\Leftrightarrow$ mệnh đề B
|…|	Giá trị tuyệt đối của một số	$\|a\|$
+	Cộng	$a+b$
-	Trừ	a-b
. (hoặc $\times$)	Nhân	$a.b$ hoặc $a\times b$
: (hoặc ___)	Chia	$a:b$ hoặc $\frac{a}{b}$
a^m	a lũy thừa m	$2^2=4$
$\sqrt{}$	Căn bậc hai	$\sqrt{4}=2$
$\sqrt[n]{}$	Căn bậc n	$\sqrt[3]{32}=2$
i	Đơn vị ảo	$i^2=-1$
$\log_a b$	Logarith cơ số a của b	$\log_3 9=2$
lg$a$	Logarith thập phân của a	log10=1
ln$a$	Logarith tự nhiên (cơ số e) của a	
n!	n giai thừa	4!=1.2.3.4=24
Δ	Tam giác	ΔABC
$\angle$	Góc phẳng	$\angle ABC$
$\frown$	Cung	$\overset{\frown}{AB}$
$AB, \overline{AB}$	Đoạn thẳng AB	
$\overrightarrow{AB}$	Vector AB	
$\perp$	Vuông góc	
||	Song song	

#	Song song và bằng	
$\backsim$	Đồng dạng	
$\uparrow\uparrow(\downarrow\downarrow)$	Song song và cùng chiều	$\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$
$\uparrow\downarrow(\downarrow\uparrow)$	Song song và ngược chiều	$\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$
$\circ$	độ	
'	phút (độ, phút, giây: góc phẳng hoặc cung)	$13^\circ10'35''$
"	giây	

I. SỐ HỌC

1. Các dấu hiệu chia hết

Cho 2: Số (và chỉ số đó) có chữ số tận cùng chẵn hoặc bằng không.

Cho 4: Số (và chỉ số đó) có hai chữ số tận cùng bằng không hoặc làm thành một số chia hết cho 4 (quy ước 4=04; 8=08).

Cho 8: Số (và chỉ số đó) có ba chữ số tận cùng bằng không hoặc làm thành một số chia hết cho 8 (quy ước 8=008; 16=016).

Cho 3: Số (và chỉ số đó) có tổng các chữ số chia hết cho 3.

Cho 9: Số (và chỉ số đó) có tổng các chữ số chia hết cho 9.

Cho 6: Số (và chỉ số đó) đồng thời chia hết cho 2 và 3.

Cho 5: Số (và chỉ số đó) có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.

Cho 25: Số (và chỉ số đó) có hai chữ số tận cùng là 0 hoặc làm thành một số chia hết cho 25.

Cho 11: Số (và chỉ số đó) có tổng các chữ số ở vị trí chẵn và tổng các chữ số ở vị trí lẻ bằng nhau hoặc hiệu của chúng là một số chia hết cho 11.

2. Các giá trị trung bình

Trung bình cộng: $M_1 = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

Trung bình nhân: $M_0 = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

Trung bình điều hòa: $M_{-1} = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$

Trung bình bình phương: $M_2 = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$

II. GIẢI TÍCH KẾT HỢP

A. CÁC LOẠI KẾT HỢP

1. Hoán vị (không lặp)

Một hoán vị của *n* phần tử là một dãy có thứ tự của *n* phần tử đó, mỗi phần tử có mặt trong dãy đúng một lần.

Số hoán vị khác nhau được tạo thành của n phần tử ký hiệu là P_n. Số này bằng tích tất cả các số nguyên liên tiếp từ 1 cho đến *n*, nghĩa là bằng *n*!

$P_n = 1.2.3\ldots n = n!$ (n giai thừa)

Quy ước 1!=1 và 0!=1.

2. Hoán vị lặp

Cho n phần tử, trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử giống nhau thuộc loại 2,… n_k phần tử giống nhau thuộc loại *k*, $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$.

Sắp xếp *n* phần tử đã cho thành mọi dãy (cùng độ dài) có thể có. Mỗi dãy thu được như vậy gọi là một hoán vị lặp của *n* phần tử đã cho.

Số lượng $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ hoán vị lặp bằng:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n}{n_1!n_2!...n_k!}$$
$$(n_1 + n_2 + ... + n_k = n, \text{k là số loại})$$

3. Chỉnh hợp (không lặp)

Cho n phần tử khác nhau, $k \le n$.

Ta gọi một chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là một dãy có thứ tự gồm *k* phần tử chọn từ *n* phần tử đã cho, mỗi phần tử có mặt trong dãy không quá một lần.

Số chỉnh hợp chập k có thể tạo thành từ n phần tử bằng:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$
$$= n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Hay $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Đặc biệt khi *k*=*n*, ta có $A_n^k = n! = P_n$

4. Chỉnh hợp lặp

Cho n phần tử khác nhau, có k là một số tự nhiên bất kỳ ($k \ge n$).

Trong định nghĩa chỉnh hợp nêu ở mục 3 nếu ta cho phép mỗi phần tử có thể có mặt trên một lần thì ta có định nghĩa của chỉnh hợp lặp chập *k*.

Số lượng chỉnh hợp lặp chập *k* có thể tạo thành từ n phần tử:

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

5. Tổ hợp (không lặp)

Từ n phần tử khác nhau ta tạo nên những nhóm gồm *k* phần tử khác nhau không để ý đến thứ tự của các phần tử trong nhóm tạo thành. Mỗi nhóm thu được theo cách đó gọi là một tổ hợp chập *k* của n phần tử đã cho ($k \le n$).

Số lượng tổ hợp chập *k* có thể thành lập từ *n* phần tử bằng:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

Hay:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (quy ước } C_n^0 = 1\text{)}$$

Các tính chất của C_n^k :

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \tag{0.1}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k; \tag{0.2}$$

$$C_n^k = P_n(k; n-k).$$

6. Tổ hợp lặp

Nếu trong định nghĩa của tổ hợp ở mục 5 ta cho phép mỗi phần tử được có mặt nhiều lần thì mỗi nhóm thu được gọi là tổ hợp lặp chập *k* của *n* phần tử đã cho.

Số các tổ hợp lặp chập *k* có thể tạo thành từ *n* phần tử bằng:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Hay:

$$\overline{C_n^k} = P_{n+k-1}(k;n-1)$$

B. NHỊ THỨC NEWTON

Nhị thức Newton[1] là công thức biểu diễn biểu thức $(a+b)^n$, với n nguyên dương, dưới dạng đa thức theo các ẩn số a và b:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n$$

Hay là:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$$

Các hệ số:

$$1, n, \frac{n(n-1)}{2!}, \dots, \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \dots (0 \le k \le n)$$

Gọi là các hệ số của nhị thức.

---

[1] Sir **Isaac Newton**, FRS (4 January 1643 – 31 March 1727) was an English physicist, mathematician, astronomer, natural philosopher, alchemist, theologian and one of the most influential men[5] in human history. More…

Tính chất của các hệ số:

Các hệ số ở các số hạng cách đều hai mút bằng nhau;

Biết các hệ số C_n^{k-1} và C_n^k của khai triển $(a+b)^n$ ta tìm được các hệ số C_{n+1}^k của khai triển $(a+b)^{n+1}$ theo công thức (1.2) mục 5.

Dựa vào các tính chất này,người ta lập ra tam giác số cho các hệ số của khai triển, gọi là tam giác Pascal:

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1
.	.	.	.		.		.		.	.	.	

Dòng thứ n(n=0,1,2,…) trong bảng trên liệt kê các hệ số của khai triển $(a+b)^n$.

Công thức nhị thức Newton có thể tổng quát cho trường hợp lũy thừa bậc n nguyên dương của tổng k số hạng:

$$(a_1+a_2+...+a_k)^n = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}$$

[2] **Blaise Pascal** (June 19, 1623 – August 19, 1662) was a French mathematician, physicist, and religious philosopher. More…

Trong đó lấy tổng (Σ) được lấy theo mọi số hạng có thể có dạng:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}$$

Với $0 \le n_i \le n$ và $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

III. ĐẠI SỐ

1. Các phép toán trên các biểu thức đại số

Giá trị tuyệt đối của một số

$|a|=a$ nếu $a \ge 0$, $|a|=-a$ nếu $a<0$

Quy tắc về dấu khi nhân và chia:

+	.	+	=	+
+	.	−	=	−
−	.	+	=	−
−	.	−	=	+

+	:	+	=	+
+	:	−	=	−
−	:	+	=	−
−	:	−	=	+

Các phép toán trên các đa thức

$$(a+b+c)x = ax+bx+cx;$$
$$(a+b+c)(m+n) = a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)$$
$$= am+an+bm+bn+cm+cn;$$
$$\frac{a+b+c}{x} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}$$

Các phép toán trên các phân thức

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cd}{bd};$$
$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Một số đồng nhất thức:

$$\left(a \pm b\right)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$\left(a \pm b\right)^3 \equiv a^3 \pm 3a^2b + +3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 \equiv \left(a - b\right)\left(a + b\right);$$
$$a^3 + b^3 \equiv \left(a + b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right);$$
$$a^3 - b^3 \equiv \left(a - b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right);$$
$$a^m - b^m \equiv \left(a - b\right)\left(a^{m-1} - a^{m-2}b + ... + ab^{m-2} + b^{m-1}\right);$$
$$a^4 + b^4 \equiv \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2$$
$$= \left(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2\right)\left(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2\right);$$
$$\left(a + b + c\right)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$
$$\left(a + b - c\right)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc;$$
$$\left(a - b - c\right)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc;$$
$$\left(a + b + c\right)^3 \equiv a^3 + b^3 + c^3 + 6abc +$$
$$+3\left(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2\right);$$
$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2 \equiv a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + 2\left(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n\right);$$
$$a^m + b^m \equiv \left(a + b\right)\left(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - ... + b^{m-1}\right).$$

(nếu *m* là số tự nhiên lẻ)

Các phép toán với lũy thừa

$$\boxed{a^m = \underbrace{a.a...a}_{\text{m lần}}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$a^m.a^n = a^{m+n};$$

$$(a.b)^m = a^m b^m;$$

$$(a^m)^n = a^{m.n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}(b \neq 0);$$

$$a^0 = 1,(a \neq 0);$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},(a \neq 0);$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Các phép toán với căn số (nếu căn có nghĩa)

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}};$$

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},(b \neq 0);$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\frac{x}{\sqrt[n]{a}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a},(a \neq 0);$$

$$\frac{x}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{x\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)}{a-b},(a \neq b).$$

2. Tỷ lệ thức

Định nghĩa: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Tính chất cơ bản: $ad=bc$

Tìm các số hạng của tỷ lệ thức: $a = \frac{bc}{d}; b = \frac{ad}{c}$

Các dẫn xuất:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\frac{d}{b}=\frac{c}{a};\frac{d}{c}=\frac{b}{a};\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};$$

$$\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d};\frac{b}{a\pm b}=\frac{d}{c\pm d}.$$

3. Số phức

Các phép toán trên số phức

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

$$i^2=-1, i^3=i^2.i=-i, i^4=i^3.i=-i.i=1,\ldots, i^{4n}=1,$$

$$i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i;$$

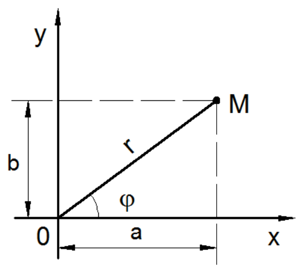
$$(a+bi)\pm(a'+b'i)=(a\pm a')+(b\pm b')i;$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i;$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2;$$

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{ba'+ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Biểu diễn hình học số phức



Hình 1

Điểm $M(a,b)$ biểu diễn số phức $a+bi$ (Hình 1)

$r = OM = a+bi = \sqrt{a^2+b^2}$ là *module* của số phức.

$\varphi = \angle xOM$ là *argument* của số phức,

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}; \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dạng lượng giác của số phức:

$$a+bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

Công thức *Moivre*[3]:

$$\left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

4. Phương trình

a) *Phương trình tương đương*

Nếu biểu thức *C(x)* có nghĩa trong miền xác định của phương trình *A(x)=B(x)*, thì:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$$

[3] **Abraham de Moivre** (1667-1754) was a French mathematician famous for de Moivre's formula, which links complex numbers and trigonometry, and for his work on the normal distribution and probability theory. He was elected a Fellow of the Royal Society in 1697, and was a friend of Isaac Newton, Edmund Halley, and James Stirling. Among his fellow Huguenot exiles in England, he was a colleague of the editor and translator Pierre des Maizeaux. More…

Nếu biểu thức *C(x)* có nghĩa và khác không trong miền xác định của phương trình *A(x)=B(x)*, thì:

$$A(x)=B(x)\Leftrightarrow A(x).C(x)=B(x).C(x)$$

Nếu n là số tự nhiên (*n*=1,2,3,…) thì:

$$A(x)=B(x)\Leftrightarrow \left[A(x)\right]^{2n+1}=\left[B(x)\right]^{2n+1}$$

b) ***Một số phương trình đại số***

(α) Phương trình bậc nhất

ax+b=0, a $\neq$ 0; nghiệm $x=-\dfrac{b}{a}$

(β) Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Nếu $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hệ vô định:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y = \dfrac{c_1 - b_1 x}{b_1} (b_1 \neq 0) \end{cases} \\ \begin{cases} y \text{ tùy ý} \\ x = \dfrac{c_1 - b_1 y}{a_1} (a_1 \neq 0) \end{cases} \end{array}\right.$$

Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ hệ vô nghiệm.

(χ) Phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Nghiệm $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Nếu b^2-4ac>0: Hai nghiệm thực và khác nhau;

Nếu $b^2-4ac=0$: Hai nghiệm thực và bằng nhau (nghiệm kép);

Nếu $b^2-4ac<0$: Hai nghiệm là cặp số phức liên hợp.

Tính chất của nghiệm (công thức viết)

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;

$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

(δ) Phương trình bậc ba

Dạng tổng quát: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$

Dạng chính tắc với $x = y - \dfrac{b}{3a}$

$$y^3 + py + q = 0$$

Trong đó $p = -\dfrac{b^2}{3a^2} + \dfrac{c}{a}; q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a_2} + \dfrac{d}{a}$

Công thức *Cardano*[4]

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Tính chất các nghiệm

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a};$$

$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}.$$

---

[4] **Gerolamo Cardano or Girolamo Cardano** (French Jerome Cardan, Latin Hieronymus Cardanus; September 24, 1501 — September 21, 1576) was an Italian Renaissance mathematician, physician, astrologer and gambler. More…

c) ***Phương trình mũ và phương trình logarith cơ bản***

(α) Phương trình mũ

$a^x = c, (a > 0)$

Với $c>0$, $a \neq 1$ có duy nhất nghiệm $x = \log_a c$;

$c=1$, $a=1$ vô số nghiệm;

$c \neq 1$, $a=1$ vô nghiệm;

$c \leq 0$ vô nghiệm

(β) Phương trình logarith

$\log_a x = c, (a > 0, a \neq 1)$

Với mọi c phương trình có nghiệm duy nhất $x=a^c$.

d) ***Phương trình lượng giác cơ bản***

$\cos x = m$

$m \leq 1$ có vô số nghiệm $x = \pm\alpha + 2k\pi, (\alpha = \arccos m, 0 \leq \alpha \leq \pi;)$

$|m|>1$ vô nghiệm

$\sin x = m$

$|m| \leq 1$ có vô số nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \alpha + 2k_1\pi \\ x_2 = (\pi - \alpha) + 2k_2\pi \end{array}\right.$$

$$\left(\alpha = \arcsin m, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$$

|m|>1 vô nghiệm

$\tan x = m$

Với mọi m thực có vô số nghiệm:

$$x = \alpha + k\pi$$

$$\left(\alpha = \arctan m, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$\cot\tan x = m$

Với mọi m thực có vô số nghiệm

$$x = \alpha + k\pi$$

$$(\alpha = arc\cot\tan m, 0 < \alpha < \pi)$$

5. Bất đẳng thức và bất phương trình

a) *Bất đẳng thức*

Định nghĩa: $a > b(a < b) \Leftrightarrow a - b > 0(< 0)$

Các tính chất cơ bản:

Nếu $a>b$ thì $b<a$; ngược lại nếu $a<b$ thì $b>a$.

Nếu $a>b$ và $b>c$ thì $a>c$. Cũng như vậy, nếu $a<b$ và $b<c$ thì $a<c$.

Nếu $a>b$ thì $a+c>b+c$

Nếu $a>b$ bà $c>d$ thì $a+c>b+d$

Nếu $a>b$ bà $c<d$ thì $a-c>b-d$

Nếu $a>b$ và $m>0$ thì $am > bm. \frac{a}{m} > \frac{b}{m}$

Nếu $a>b$ và $m<0$ thì $am<bm$

Nếu $a>b>0$ và $c>d>0$ thì $ac>bd$

b) ***Bất phương trình***

(α) Bất phương trình tương đương

$A > B \Leftrightarrow B < A$

$A \geq B \Leftrightarrow C + A \geq B + C$ (với C có nghĩa trong miền xác định của bất phương trình $A \geq B$).

Nếu C có nghĩa và >0 trong miền xác định của bất phương trình A>B, thì:

$A > B \Leftrightarrow A.C > B.C$

Nếu C có nghĩa và <0 trong miền xác định của bất phương trình A>B, thì:

$A > B \Leftrightarrow A.C < B.C$

Nếu $B \neq 0$ trong miền xác định thì:

$\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow A.B > 0$

(β) Bất phương trình có chứa giá trị tuyệt đối

Giả sử $\alpha > 0$, khi đó:

$$|F| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < F < \alpha;$$

$$|F| > \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F > \alpha \\ F < -\alpha \end{array}\right.$$

$$|A(x)| < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -B(x) < A(x) < B(x) \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| > B(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(x) < 0 \\ \begin{cases} A(x) > B(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) < -B(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$|A(x)| > |B(x)| \Leftrightarrow [A(x)]^2 > [B(x)]^2$$

(χ) Bất phương trình bậc nhất một ẩn

$ax \geq b, (a \neq 0)$

Nếu a>0 thì $x > \dfrac{b}{a}$; nếu a<0 thì $x < \dfrac{b}{a}$

(δ) Bất phương trình bậc hai một ẩn

$ax^2+bx+c>0$

$$a>0,\begin{cases} b^2-4ac<0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x; \\ b^2-4ac=0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x\neq -\dfrac{b}{2a} \\ b^2-4ac>0 \text{ nghiệm đúng với mọi } \left[\begin{array}{l} x<x_1 \\ x>x_2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$a<0,\begin{cases} b^2-4ac\leq 0 \text{ vô nghiệm} \\ b^2-4ac>0 \text{ nghiệm đúng với } x_1<x<x_2; \end{cases}$$

Ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm thực của tam thức bậc hai ax^2+bx+c.

(ε) Bất phương trình mũ và logarith cơ bản

Bất phương trình mũ $a^{A(x)}>a^{B(x)}$ với $a>1$ sẽ tương đương với bất phương trình $A(x)>B(x)$; với $0<a<1$ sẽ tương đương với bất phương trình $A(x)<B(x)$.

Bất phương trình logarith

$$\log_a A(x)>\log_a B(x)$$

Với a>1 sẽ tương đương với hệ:

$$\begin{cases} B(x)>0 \\ A(x)>B(x) \end{cases}$$

Với 0<a<1 sẽ tương đương với hệ:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

(ϕ) Bất phương trình lượng giác cơ bản

$\cos x \geq m$

Với $m < -1$ nghiệm đúng với mọi x;

Với $m > 1$ vô nghiệm;

Với $|m| \leq 1$ nghiệm đúng với $-\alpha + 2k\pi \leq x \leq \alpha + 2k\pi,$

trong đó $\alpha = \arccos m, 0 \leq \alpha \leq \pi$

$\sin x \geq m$

Với $m < -1$ nghiệm đúng với mọi x;

Với $m > 1$ vô nghiệm;

Với $|m| \leq 1$ nghiệm đúng với $\alpha + 2k\pi \leq x \leq (\pi - \alpha) + 2k\pi,$

trong đó $\alpha = \arcsin m, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$\tan x \geq m$

với mọi m nghiệm đúng với $\alpha + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}(2k+1),$

trong đó $\alpha = \arctan m, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

$\cot\tan x \geq m$

với mọi m nghiệm đúng với $k\pi \leq x \leq \alpha + k\pi,$

trong đó $\alpha = \mathrm{arc\,cottan}\, m, 0 < \alpha < \pi.$

6. Cấp số; một số tổng hữu hạn

(α) Cấp số cộng

$\div a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, ...$

$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, ..., a_n = a_1 + (n-1)d$

Trong đó a_n là số hạng thứ n của cấp số cộng, d là công sai.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

Trong đó S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số (tổng riêng thứ n).

(β) Cấp số nhân

$\div\div a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...$

$a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, ..., a_n = a_1 q^{n-1}$

Trong đó a_n là số hạng thứ n của cấp số nhân, q là công bội.

Tổng riêng thứ n:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}, (q \neq 1)$$

$$S_n = na_1, (q = 1)$$

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $(|q| < 1)$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

(χ) Một số tổng hữu hạn

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$p+(p+1)+\ldots+(q-1)+q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$$

$$2+4+6+\ldots+(2n-2)+2n = n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-3)^2+(2n-1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-3)^3+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

7. Logarith

Định nghĩa: Cho $N>0,\ 0<b,\ b\neq 1$

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

Tính chất

$$\log_b(N_1N_2) = \log_b|N_1| + \log_b|N_2|, (N_1N_2 > 0);$$

$$\log_b \frac{N_1}{N_2} = \log_b|N_1| - \log_b|N_2|, (N_1N_2 > 0);$$

$$\log_b N^\alpha = \alpha \log_b N, (N > 0);$$

$$\log_b \sqrt[\alpha]{N} = \frac{1}{\alpha}\log_b N, (N > 0);$$

$$\log_b N = \log_b a . \log_a N, (a > 0, a \neq 1, N > 0);$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, (a > 0, a \neq 1)$$

Logarith thập phân:

$$\lg N = x \Leftrightarrow 10^x = N \left(\text{cơ số } b = 10\right)$$

Logarith tự nhiên

$$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$$

$$\text{trong đó } b = e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828...$$

IV. HÌNH HỌC

A. CÁC HÌNH PHẲNG

1. Tam giác

a) *Tam giác đều*

a là cạnh, h là đường cao, S là diện tích.

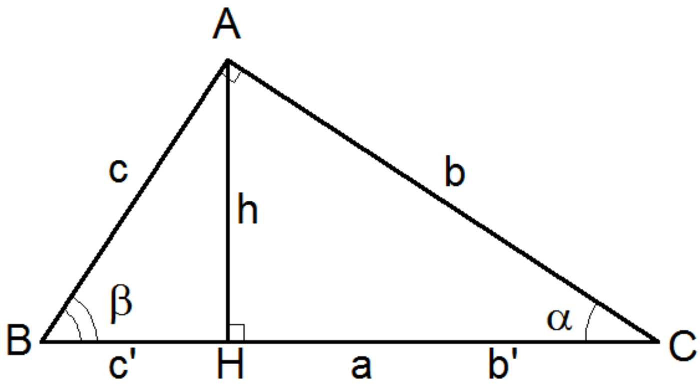
$$a = \frac{2}{3}\sqrt{3}h \approx 1,566h;$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 0,866a;$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 0,433a^2;$$

$$S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} \approx 0,578h^2.$$

b) ***Tam giác vuông***



Hình 2

b và *c* là cạnh góc vuông; *a* là cạnh huyền; α và β là các góc nhọn; *S* là diện tích; *h* là đường cao hạ từ đỉnh góc vuông xuống cạnh huyền; *b'*, *c'* là hình chiếu của *b* và *c* lên cạnh huyền.

$\alpha + \beta = 90^\circ;$

$a^2 = b^2 + c^2;$

$b = a\sin\alpha = a\cos\beta = c\cot\tan\beta = c\tan\alpha;$

$S = \frac{1}{2}bc;$

$c^2 = c'a';$

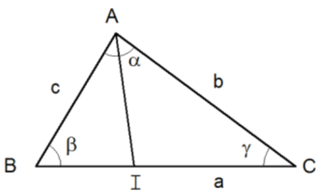
$b^2 = b'a;$

$h^2 = c'b';$

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$

c) *Tam giác thường*

a, b, c là các cạnh; α, β, γ là các góc đối tương ứng với các cạnh; *r, R* là bán kính vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp; *p* là nửa chu vi; *S* là diện tích.



Hình 3

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R;$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma;$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cot\tan\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}=$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha;$$

$$r=(p-a)\tan\frac{\alpha}{2}=(p-b)\tan\frac{\beta}{2}=(p-c)\tan\frac{\gamma}{2};$$

Độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh *A*:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2};$$

Độ dài đường cao hạ từ đỉnh *A*:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a};$$

Độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh *A*:

$$g_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)};$$

Tính chất của đưởng phân giác (*AI* là phân giác trong của góc *A*):

$$\frac{BI}{AB} = \frac{IC}{AC};$$

Trong một tam giác, giao điểm ba đường phân giác là tâm vòng tròn nội tiếp, giao điểm ba đường trung trực là tâm vòng tròn ngoại tiếp.

2. Đa giác

a) *Hình vuông*

a là cạnh; *d* là đường chéo; *S* là diện tích.

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}d \approx 0,707d;$$

$$d = \sqrt{2}a \approx 1,414a;$$

$$S = \frac{1}{a}d^2 = a^2.$$

b) *Hình chữ nhật và hình bình hành*

a là cạnh đáy; *h* là đường cao; *S* là diện tích

S=ah.

c) *Hình thoi*

a là cạnh đáy; *d* là đường chéo lớn; *d'* là đường chéo nhỏ; *S* là diện tích:

$$S = \frac{1}{2}dd';$$

Nếu góc nhọn hình thoi bằng 60° thì $a = d'$ và:

$$S = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \approx 0,866a^2;$$

d) *Hình thang*

a và *b* là cạnh đáy; *b* là đường cao; *S* là diện tích

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

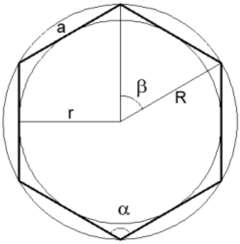
e) *Tứ giác lồi bất kỳ*

d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo; α là góc giữa chúng; *S* là diện tích.

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

f) *Đa giác đều n cạnh*

n là số cạnh; *a* là cạnh; α là góc trong của đa giác; β là góc ở tâm; *r* và *R* là bán kính vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp; *S* là diện tích.



Hình 4

$$S = \frac{1}{4} na^2 \cot\tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} arn;$$

$$r = \frac{a}{2} \cot\tan \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = \frac{a}{2\sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\alpha}{2} \cos\sec \frac{180^\circ}{n};$$

$$a = 2r \tan \frac{\beta}{2} = 2R \sin \frac{\beta}{2};$$

$$\alpha = \frac{n-2}{n}.180^\circ;$$

$$\beta = \frac{360^\circ}{n}.$$

3. Hình tròn

a) *Hình tròn*

r là bán kính; *C* là độ dài vòng tròn; *S* là diện tích

$C = 2\pi r \approx 6,283r;$

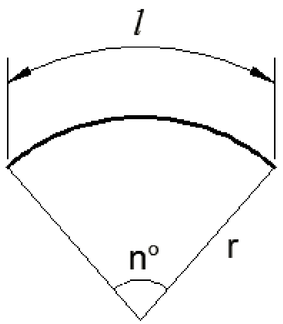
$C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3,545\sqrt{S};$

$S = \pi r^2 = 3,142r^2;$

$$S = \frac{Cr}{2}.$$

b) ***Hình quạt tròn***

r là bán kính vòng tròn; l là độ dài cung; n° là số đo góc ở tâm; S là diện tích



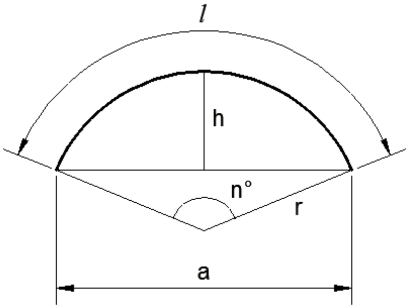
Hình 5

$$l = \frac{2\pi r n^\circ}{360^\circ} \approx 0,1745rn^\circ;$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} \approx 0,00872r^2 n.$$

c) ***Hình viên phân***

r là bán kính vòng tròn; l là độ dài cung; a là độ dài dây cung; n° là số đo góc ở tâm; h là độ cao của viên phân; S là diện tích



Hình 6

$$a = 2r\sin\frac{n^\circ}{2};$$

$$h = r\left(1-\cos\frac{n^\circ}{2}\right) = \frac{a}{2}\tan\frac{n^\circ}{4};$$

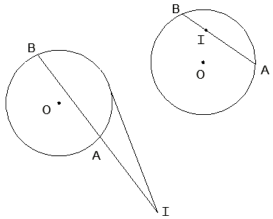
$$l = \pi r\frac{n^\circ}{180^\circ} = 0,01795rn;$$

$$S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi n^\circ}{180^\circ} - \sin n^\circ\right).$$

4. Phương tích

a) *Phương tích*

Phương tích của điểm *I* đối với vòng tròn tâm *O*, bán kính r là đại lượng $d^2 - r^2$, trong đó d là khoảng cách *OI*. Nếu *I* nằm ngoài hình tròn thì phương tích dương, *I* nằm trong đường tròn thì phương tích âm, *I* nằm trên đường tròn thì phương tích bằng 0.



Hình 7

Ký hiệu giá trị tuyệt đối của phương tích là p^2, thì

$$p^2 = \left|d^2 - r^2\right|;$$

$$p^2 = IA.IB = IT^2.$$

b) ***Trục đẳng phương – Tâm đẳng phương***

Trục đẳng phương của hai vòng tròn O_1 và O_2 ($O_1 \neq O_2$) là quỹ tích các điểm *M* có phương tích bằng nhau đối với hai vòng tròn đã cho.

Trục đẳng phương vuông góc với đường nối hai tâm tại điểm *N*, mà:

$$O_1N = \frac{d}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2d}$$

Hoặc

$$NO_2 = \frac{d}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2d}$$

Trong đó *d* là độ dài đường nối tâm; r_1 và r_2 là các bán kính của hai vòng tròn.

Đặc biệt nếu hai vòng tròn cắt nhau tại hai điểm thì trục đẳng phương đi qua hai điểm ấy; nếu hai vòng tròn tiếp xúc nhau thì trục đẳng phương là tiếp tuyến chung tại tiếp điểm.

Tâm đẳng phương của ba vòng tròn là giao điểm của ba trục đẳng phương của từng cặp các vòng tròn đó.

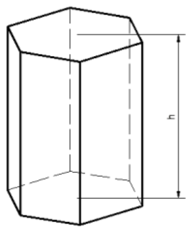
B. THỂ TÍCH VÀ DIỆN TÍCH XUNG QUANH

Ký hiệu chung: *h* là đường cao; *p* là chu vi đáy; *S* là diện tích đáy; S_{xq} là diện tích xung quanh; *V* là thể tích.

1. Hình lăng trụ

$V = Sh;$

$S_{xq} = ph.$



Hình 8: Hình lăng trụ

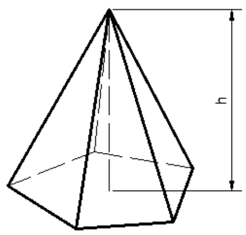
2. Hình chóp đều

(Nhớ rằng chân đường cao trùng với tâm đa giác đáy, đáy là đa giác đều).

a là trung đoạn của hình chóp đều:

$$V = \frac{1}{3}Sh;$$

$$S_{xq} = \frac{1}{2}pa.$$



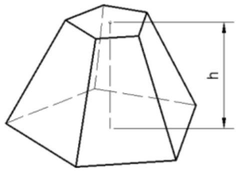
Hình 9: Hình chóp đều

3. Hình chóp cụt đều

a là trung đoạn của hình chóp cụt đều; S_1 và S_2 là các diện tích đáy; p_1 và p_2 là các chu vi đáy.

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right);$$

$$S_{xq} = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)a.$$



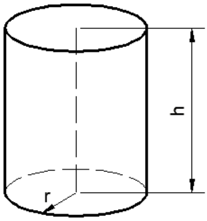
Hình 10: Hình chóp cụt đều

4. Hình trụ

r là bán kính vòng tròn đáy.

$$V = Sh = r^2 h;$$

$$S_{xq} = 2\pi rh.$$



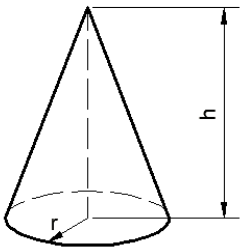
Hình 11: Hình trụ

5. Hình nón

r là bán kính vòng tròn đáy; *l* là đường sinh.

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}r^2 h;$$

$$S_{xq} = \pi rl.$$



Hình 12: Hình nón

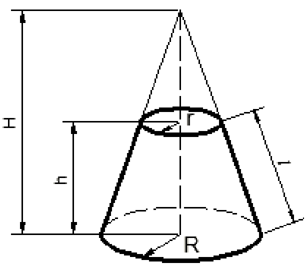
6. Hình nón cụt

R và *r* là các bán kính vòng tròn đáy dưới và đáy trên; *h* là đường cao nón cụt; *H* là đường cao hình nón; *l* là đường sinh nón cụt.

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right);$$

$$S_{xp} = \pi\left(R + r\right)l;$$

$$H = h + \frac{hr}{R - r}.$$



Hình 13: Hình nón cụt

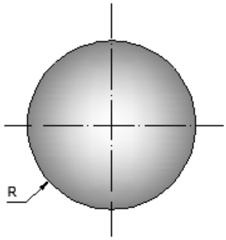
7. Hình cầu

a) *Hình cầu*

R là bán kính; *V* là thể tích; *S* là diện tích mặt cầu.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$S = 4\pi R^2.$$



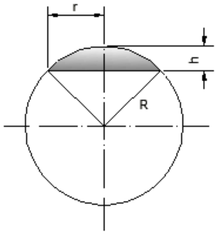
Hình 14: Hình cầu

b) *Hình chỏm cầu*

R là bán kính cầu; *r* là bán kính vòng tròn đáy chỏm cầu; *h* là đường cao chỏm cầu; *V* là thể tích; *S* là diện tích mặt chỏm cầu.

$$V = h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{1}{6}\pi h\left(h^2 + 3r^2\right);$$

$$S = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right).$$



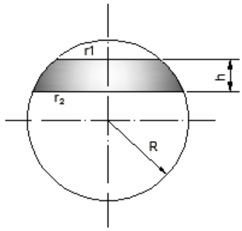
Hình 15: Chỏm cầu

c) *Hình đới cầu*

R là bán kính hình cầu; r_1 và r_2 là các bán kính vòng tròn đáy đới cầu; *h* là đường cao đới cầu; *V* là thể tích; *S* là diện tích xung quanh đới cầu.

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)h;$$

$$S = 2\pi Rh.$$



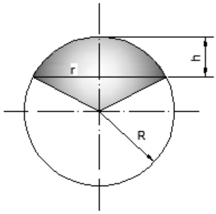
Hình 16: Hình đới cầu

d) *Hình quạt cầu*

R là bán kính cầu; r là bán kính vòng tròn đáy chỏm cầu; h là đường cao chỏm cầu; V là thể tích; S là diện tích mặt quạt cầu.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h;$$

$$S = \pi R\left(r + 2h\right).$$



Hình 17: Hình quạt cầu

V. LƯỢNG GIÁC

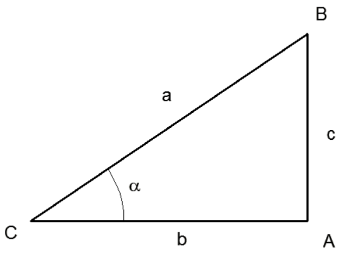
1. Hàm số lượng giác và dấu của nó

a) *Hàm số lượng giác của các góc nhọn*

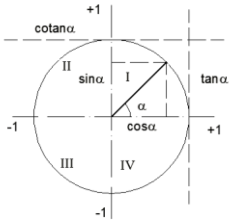
$$\sin\alpha = \frac{c}{a}; \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\tan\alpha = \frac{c}{b}; \qquad \cot\tan\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\sec\alpha = \frac{a}{b}; \qquad \cos\sec\alpha = \frac{a}{c}.$$



Hình 18



Hình 19

b) *Dấu của hàm số lượng giác của một góc bất kỳ*

Góc phần tư	**sinα**	**cosα**	**tanα**	**cottanα**	**secα**	**cossecα**
I	+	+	+	+	+	+

II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

2. Hàm số lượng giác của một số góc đặc biệt

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
cottanα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
secα	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	-1	∞	1
cossecα	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	-1	∞

3. Một số công thức đổi góc

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot\tan(-\alpha) = -\cot\tan\alpha$$
$$\sin(180^\circ \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^\circ \pm \alpha) = \pm\tan\alpha$$
$$\cot\tan(180^\circ \pm \alpha) = \pm\cot\tan\alpha$$
$$\sin(360^\circ \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$$
$$\cos(360^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360^\circ \pm \alpha) = \pm\tan\alpha$$
$$\cot\tan(360^\circ \pm \alpha) = \pm\cot\tan\alpha$$
$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$$
$$\tan(90^\circ \pm \alpha) = \pm\cot\tan\alpha$$
$$\cot\tan(90^\circ \pm \alpha) = \pm\tan\alpha$$
$$\sin(270^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^\circ \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$$
$$\tan(270^\circ \pm \alpha) = \pm\cot\tan\alpha$$
$$\cot\tan(270^\circ \pm \alpha) = \pm\tan\alpha$$

4. Các công thức cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$
$$\tan\alpha.\cot\tan\alpha = 1;$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\tan\alpha};$$
$$\cot\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha};$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha;$$
$$1 + \cot\tan^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \cos\sec^2\alpha.$$

5. Hàm số lượng giác của góc bội

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha};$$

$$\cot\tan 2\alpha = \frac{\cot\tan^2\alpha - 1}{2\cot\tan\alpha} = \frac{\cot\tan\alpha - \tan\alpha}{2};$$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha};$$

$$\cot\tan 3\alpha = \frac{\cot\tan^3\alpha - 3\cot\tan\alpha}{3\cot\tan^2\alpha - 1};$$

$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha;$

$\cos na = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha.$

6. Công thức hạ bậc

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha);$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha - \cos 3\alpha);$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}\left(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + \frac{6}{2}\right);$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}\left(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + \frac{6}{2}\right);$$

$$\sin^5\alpha = \frac{1}{16}(\sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha);$$

$$\cos^5\alpha = \frac{1}{16}(\cos 5\alpha - 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha).$$

7. Hàm số lượng giác của tổng và hiệu các góc

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta};$$

$$\cot\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\tan\alpha\cot\tan\beta \pm 1}{\cot\tan\beta \pm \cot\tan\alpha}.$$

8. Biến đổi tổng và hiệu của hai hàm số lượng giác

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\cot\tan\alpha+\cot\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\cot\tan\alpha-\cot\tan\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\tan\alpha+\cot\tan\alpha=2\cos\sec 2\alpha;$$

$$\tan\alpha-\cot\tan\alpha=-2\cot\tan 2\alpha.$$

9. Biến đổi tích của hai hàm số lượng giác

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right];$$

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\tan\alpha+\cot\tan\beta}=-\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\tan\alpha-\cot\tan\beta};$$

$$\cot\tan\alpha\cot\tan\beta=\frac{\cot\tan\alpha+\cot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=-\frac{\cot\tan\alpha-\cot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta};$$

$$\cot\tan\alpha\tan\beta=\frac{\cot\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\cot\tan\beta}=-\frac{\cot\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha-\cot\tan\beta}.$$

10. Công thức góc chia đôi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\cot\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\cot\tan^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cot\tan\frac{\alpha}{2}};$$

$$|\cos\alpha \pm \sin\alpha| = \sqrt{1+\sin 2\alpha}.$$

11. Một số công thức đối với các góc trong một tam giác (α, β, γ là các góc trong một tam giác)

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1;$$

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1;$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2;$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma;$$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\sin 2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma;$$

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma;$$

$$\cot\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\tan\frac{\beta}{2}+\cot\tan\frac{\gamma}{2}=\cot\tan\frac{\alpha}{2}\cot\tan\frac{\beta}{2}\cot\tan\frac{\gamma}{2};$$

$$\cot\tan\alpha\cot\tan\beta+\cot\tan\alpha\cot\tan\gamma+\cot\tan\beta\cot\tan\gamma=1.$$

12. Một số công thức khác

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1+\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1-\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1\pm\tan\alpha=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)}{\cos\alpha};$$

$$1\pm\cot\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)$$

trong đó

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi,$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi;$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha.$$

13. Công thức liên hệ giữa các hàm số lượng giác

Hàm	**sinα**	**cosα**	**tanα**	**cottanα**	**secα**	**cossecα**
sinα=		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos\sec\alpha}$
cosα=	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\cot\tan\alpha}{\sqrt{1+\cot\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\cos\sec^2\alpha-1}}{\cos\sec\alpha}$
tanα=	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\cot\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\cos\sec^2\alpha-1}}$
cottan=α	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$		$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\cos\sec^2\alpha-1}$
secα=	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\cot\tan^2\alpha}}{\cot\tan\alpha}$		$\pm\dfrac{\cos\sec\alpha}{\sqrt{\cos\sec^2\alpha-1}}$
cossecα =	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\cot\tan^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

VI. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẲNG

1. Điểm

Khoảng cách giữa hai điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2):

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

Khoảng cách từ một điểm (x, y) đến gốc tọa độ:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}$$

Dạng tổng quát của khoảng cách giữa hai điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) trong hệ tọa độ xiên góc φ:

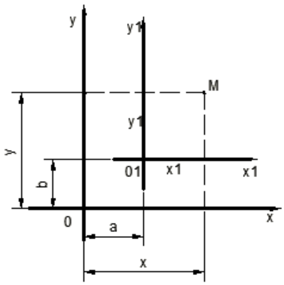
$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+2\left(x_2-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\cos\varphi}$$

Tọa độ của điểm chia đoạn thẳng theo tỷ lệ m/n

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n};$$
$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

2. Phép đổi trục tọa độ (Hình 20)

$$\begin{cases}x=a+x_1\\ y=b+y_1\end{cases}\quad \text{hoặc}\quad \begin{cases}x_1=x-a\\ y_1=y-b\end{cases}$$



Hình 20

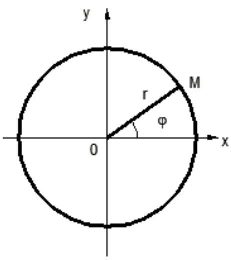
3. Tọa độ cực (Hình 21)

Ox: Trục cực;

O: Cực;

r: Bán kính vector;

φ: Góc cực.



Hình 21

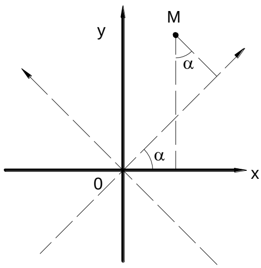
$$x = r\cos\varphi;$$
$$y = r\sin\varphi;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Phép quay các trục tọa độ

x,*y*: Tọa độ cũ của điểm *M*;

x_1, y_1: Tọa độ mới của điểm *M*.

α: Góc quay.



Hình 22

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha; \\ y = x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha. \end{cases}$$

5. Phương trình đường thẳng

Phương trình tổng quát $Ax+By+C=0$.

Phương trình chính tắc $y=kx+b$

Phương trình theo các đoạn chắn trên các trục tọa độ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Phương trình pháp dạng $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

Hệ số pháp dạng $M = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (dấu được chọn sao cho ngược dấu với dầu của C).

6. Hai đường thẳng

Các phương trình ở dạng tổng quát

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1=C\\ &A_2x+B_2y+C_2=0\end{aligned}$$

Góc giữa hai đường thẳng đã cho (với hệ số góc k_1, k_2)

$$\tan\theta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

Điều kiện để hai đường thẳng song song

$$k_1=k_2 \text{ hoặc } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

$k_1k_2 = -1$ hoặc $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1B_2 - C_2B_1}{B_1A_2 - B_2A_1} \\ y = \dfrac{C_2B_1 - C_1A_2}{B_1A_2 - B_2A_1} \end{cases}$$

Đường thẳng thứ ba $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng trên nếu:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Đường thẳng và điểm

Phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước $M(x_0, y_0)$ theo một hướng đã cho:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$k = \tan\alpha$ (α là góc lập bởi đường thẳng với chiều dương trục hoành)

Khoảng cách từ điểm (x_1, y_1) tới một đường thẳng

$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$ (a là góc lập bởi đường thẳng với chiều dương trục hoành) hoặc $d = \pm\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (dấu được chọn ngược dấu với *C*).

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đã cho $A(x_0, y_0), B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và song song với đường thẳng *y=ax+b*

$$y-y_0=a(x-x_0)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_1, y_1)$ và vuông góc với đường thẳng *y=ax+b*

$$y-y_1=-\frac{1}{a}(x-x_1)$$

8. Diện tích tam giác

Tam giác có một đỉnh ở gốc tọa độ

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2)$$

Tam giác có vị trí bất kỳ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\left[\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right]=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\left[x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right]$$

9. Phương trình đường tròn

Đường tròn có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính *r*

$$x^2+y^2=r^2$$

Đường tròn với tâm có tọa độ (*a*,*b*) bán kính *r*

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$$

Phương trình tham số của đường tròn

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}\left(0\le t\le 2\pi\right)$$

10. Ellipse (Hình 23)

O: Tâm;

$AA_1=2a$: Trục lớn;

$BB_1=2b$: Trục nhỏ;

F, F_1: Các tiêu điểm;

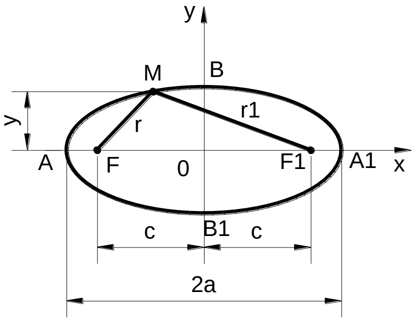
FM, F_1M: Các bán kính vector;

$FF_1=2c$: *Tiêu cự;*

$BF=BF_1=AO=a;$

$FM+F_1M=AA_1=2a;$

$a^2-c^2=b^2.$



Hình 23: Hình Ellipse

Phương trình chính tắc của Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Tâm sai của Ellipse:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$$

Bán kính vector của điểm $M(x, y)$ của Ellipse

$$r=a\pm\varepsilon x$$

Diện tích của Ellipse

S=πab

Phương trình tiếp tuyến với Ellipse tại điểm $M_1(x_1,y_1)$

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

Phương trình pháp tuyến với Ellipse tại điểm $M_0(x_0,y_0)$

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

Tham số tiêu của Ellipse

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Phương trình các đường chuẩn của Ellipse

$$x = \pm\frac{a^2}{c} \text{ hoặc } x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$

Phương trình đường kính của Ellipse

$$y = \frac{b^2}{a^2k}x$$

Trong đó k là hệ số góc của đường kính liên hợp.

Phương trình tham số của Ellipse:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

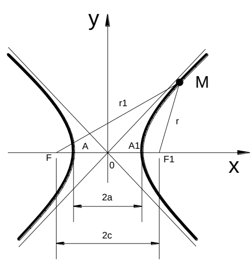
11. Hyperbola (Hình 24)

O: Tâm;

F, F_1: Các tiêu điểm;

FM, F_1M: Các bán kính vector;

$FM - F_1M = AA_1 - 2a;$



Hình 24: Hyperbola

$FF_1=2c;$

$c^2-a^2=b^2.$

Phương trình chính tắc của Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Tâm sai của Hyperbola

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$$

Bán kính vector của điểm thuộc Hyperbola

$$r=\frac{c}{a}x-a=\varepsilon x-a$$

$$r_1=\frac{c}{a}x+a=\varepsilon x+a$$

Phương trình các đường tiệm cận của Hyperbola

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_1\left(x_1,y_1\right)$

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

Phương trình pháp tuyến tại điểm $M_0\left(x_0,y_0\right)$

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$$

Hoặc

$$\frac{a^2 x}{x_0} + \frac{b^2 y}{y_0} = c^2$$

Tham số tiêu của Hyperbola $p = \frac{b^2}{a}$

Phương trình đường kính của Hyperbola

$$y = \frac{b^2}{a^2 k} x$$

Trong đó k là hệ số góc của đường kính liên hợp.

Phương trình của Hyperbola cân

$xy = \frac{a^2}{2}$ hoặc $y = \frac{k}{x}$

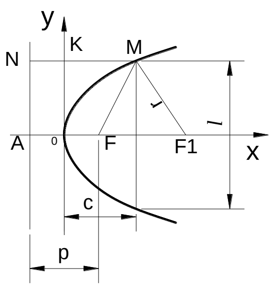
12. Parabola(Hình 25)

AN: Đường chuẩn

O: Đỉnh

F: Tiêu điểm

AF=*p*: Tham số của Parabola



Hình 25: Parabola

S: Diện tích

Phương trình chính tắc của parabola

$y^2=2px$

Diện tích của parabola

$$S = \frac{2}{3}lc$$

Tâm sai của parabola $\varepsilon = \frac{FM}{MK} = 1$

Bán kính vector của parabola

$$r = x + \frac{p}{2}$$

Phương trình đường chuẩn của parabola

$$x = -\frac{p}{2}$$

Phương trình tiếp tuyến của parabola

$$yy_1 = p\left(x + x_1\right)$$

Hoặc

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{y_0}\left(x - x_1\right)$$

Phương trình pháp tuyến của parabola

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

Hoặc

$$y_1 + (x - x_1) + p(y - y_1) = 0$$

VII. ĐẠI SỐ VECTOR

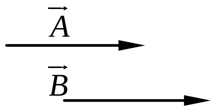
1. Các phép toán tuyến tính trên các vector

Vector $\vec{A}$ là một đoạn thẳng có độ dài xác định và hướng xác định.

$A = |\vec{A}|$ là độ dài hoặc module của vector $\vec{A}$.

Các vector bằng nhau (Hình 26)

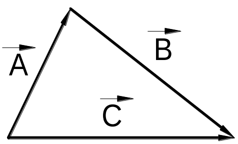
$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \vec{A} \downarrow\downarrow \vec{B} \end{cases}$$



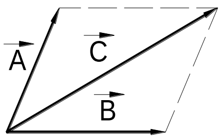
Hình 26

Cộng các vector (các hình 27, 28, 29)

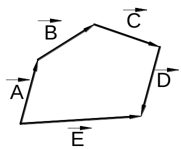
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C};$$
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{E}$$



Hình 27



Hình 28



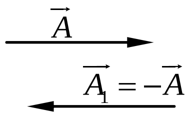
Hình 29

Vector đối (Hình 30)

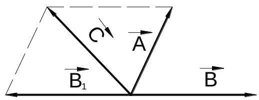
$$\vec{A}_1 = -\vec{A} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{A}| = |\vec{A}_1| \\ \vec{A} \uparrow\downarrow \vec{A}_1 \end{cases}$$

Trừ các vector (Hình 32, 31)

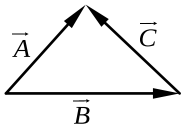
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \vec{B}_1 = \vec{C}$$



Hình 30



Hình 31



Hình 32

Trong đó $\vec{B}_1 = -\vec{B}$

Nhân vector với một số

$$k\vec{A} = \vec{B}$$

Vector $\vec{B}$ luôn thỏa mãn các điều kiện:

$$|\vec{B}| = |k||\vec{A}|$$

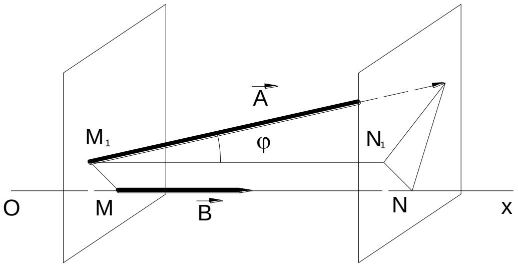
$$\vec{B} \downarrow\downarrow \vec{A}, \text{ nếu k} > 0$$

$$\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, \text{ nếu k} < 0$$

Nếu k=0 hoặc $\vec{A} = 0$, thì $\vec{B} = 0$

2. Phép chiếu vector lên trục hoặc vector (Hình 33)

$$hc_x\vec{A} = hc_{\vec{B}}\vec{A} = MN = A\cos\varphi = A\cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$$

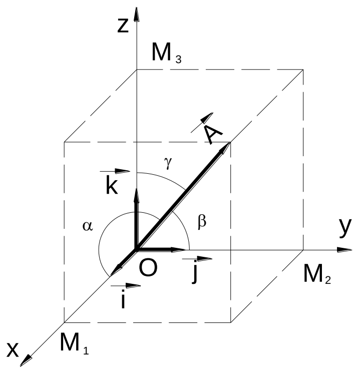


Hình 33

3. Các thành phần và tọa độ của vector (Hình 34)

$\vec{A}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$

Hoặc $\vec{A}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$



Hình 34

Trong đó $\overrightarrow{OM_1}=X\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2}=Y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3}=Z\vec{k}$ là các thành phần của vector;

$X=A\cos\alpha, Y=A\cos\beta, Z=A\cos\gamma$ là các tọa độ của vector (chiếu vector này lên các trục tọa độ).

4. Các phép toán tuyến tính trên các vector được cho nhờ các tọa độ

Nếu $\vec{A}=\vec{A_1}\pm\vec{A_2}$ thì $X=X_1\pm X_2, Y=Y_1\pm Y_2, Z=Z_1\pm Z_2$.

Nếu $\vec{A_2}=\lambda\vec{A_1}$ thì $X_2=\lambda X_1, Y_2=\lambda Y_1, Z_2=\lambda Z_1$.

5. Tích vô hướng của hai vector

Định nghĩa

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\vec{A}\vec{B}=AB\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)=Ach_{\vec{A}}\vec{B}=Bhc_{\vec{B}}\vec{A}$$

Các tính chất của tích vô hướng

$\vec{A}\vec{B}=\vec{B}\vec{A}$ (tính giao hoán)

$\left(m\vec{A}\right)\vec{B}=m\left(\vec{A}\vec{B}\right)$

$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\vec{C}=\vec{A}\vec{C}+\vec{B}\vec{C}$ (tính phân phối)

Tích vô hướng của các vector dưới dạng tọa độ

$$\vec{A}\vec{B}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Bình phương vô hướng của vector

$$\vec{A}^2=\vec{A}\vec{A}=AA\cos 0=A^2$$

Bình phương module của vector

$$A^2=\vec{A}^2=X^2+Y^2+Z^2$$

Module (độ dài) của vector

$$A^2=\left|\vec{A}\right|=X^2+Y^2+Z^2$$

Điều kiện để hai vector trực giao $\left(\vec{A}\perp\vec{B}\right)$

$$\vec{A}\vec{B}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$$

Góc giữa hai vector $\vec{A}\left\{X_1,Y_1,Z_1\right\}$ và $\vec{B}\left\{X_2,Y_2,Z_2\right\}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{A}\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

Các cosin chỉ phương của vector $\vec{A}\{X, Y, Z\}$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

6. Tích vector của hai vector

Định nghĩa

Tích vector của hai vector $\vec{A}, \vec{B}$ (ký hiệu $\vec{A} \times \vec{B}$ hoặc $\left[\vec{A}, \vec{B}\right]$) là vector $\vec{C}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\vec{C} = AB\sin\left(\vec{A}, \vec{B}\right), \vec{C} \perp \vec{A}, \vec{C} \perp \vec{B}$$

Và các vector $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ lập thành bộ ba vector thuận (nghịch) nếu hệ tọa độ là thuận (nghịch).

Các tính chất của tích vector

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\left(m\vec{A}\right)\times\vec{B}=m\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{A}\times\left(n\vec{B}\right)=n\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$

$$\vec{C}\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{C}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{B}$$

Tích vector dưới dạng tọa độ

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(Y_1Z_2-Y_2Z_1\right)\vec{i}+\left(Z_1X_2-Z_2X_1\right)\vec{j}+\left(X_1Y_2-X_2Y_1\right)\vec{k}.$$

Góc giữa vector

$$\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(Y_1Z_2-Y_2Z_1\right)^2+\left(Z_1X_2-Z_2X_1\right)^2+\left(X_1Y_2-X_2Y_1\right)^2}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$$

7. Tích hỗn hợp của ba vector

Định nghĩa

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C}=\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

Các tính chất của tích hỗn hợp

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C} = \vec{B}\vec{C}\vec{A} = \vec{C}\vec{A}\vec{B} = -\left(\vec{B}\vec{A}\vec{C}\right) = -\left(\vec{A}\vec{C}\vec{B}\right) = -\left(\vec{C}\vec{B}\vec{A}\right)$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\vec{C}\vec{D} = \vec{A}\vec{C}\vec{D} + \vec{B}\vec{C}\vec{D}$$

$$\left(m\vec{A}\right)\vec{B}\vec{C} = m\left(\vec{A}\vec{B}\vec{C}\right)$$

Ý nghĩa hình học của tích hỗn hợp

$\vec{A}\vec{B}\vec{C}$ bằng thể tích của hình hộp có ba cạnh là ba vector ấy.

Điều kiện đồng phẳng của ba vector $\vec{A}\vec{B}\vec{C} = 0$

Tích hỗn hợp dưới dạng tọa độ

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= X_1\left(Y_2Z_3 - Z_2Y_3\right) + Y_1\left(Z_2X_3 - Z_3X_2\right) + Z_1\left(X_2Y_3 - X_3Y_2\right).$$

VIII. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Giới hạn

lim$(x+y-z)$=lim$x$+lim$y$-lim$z$ (nếu các giới hạn ở vế phải tồn tại)

lim(xyz)=lim$x$ lim$y$ lim$z$ (nếu giới hạn ở vế phải tồn tại)

$\lim\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\lim x}{\lim y}$ nếu tồn tại $\lim x$ và $\lim y \neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{a\to\infty}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e,(e=2.718281828...);$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)n=e^x;$$

$$\lim_{x\to 0}a^x=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}.$$

2. Đạo hàm và vi phân

Các đạo hàm đơn giản

$$(Cu)' = Cu';$$

$$(u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

$$\left[f\left(u(x)\right)\right]' = f'(u)u'(x);$$

$$(C)' = 0;$$

$$(x)' = 1;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x};$

$(\lg x)' = \frac{1}{x}\lg e;$

$(e^x)' = e^x;$

$(a^x)' = a^x \ln a;$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$(\cot\tan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$

$(\mathrm{arc}\,\mathrm{cottan}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2};$

$(u^v)' = vu^{v-1}(u)' + u^v \ln u (v)'.$

Vi phân của hàm và các tính chất đơn giản;

dy=y’dx

$d\left(Cu\right) = Cdu;$
$d\left(u + v - w\right) = du + dv - dw;$
$d\left(uvw\right) = \left(vw\right)du + \left(uw\right)dv + \left(uv\right)dw;$
$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

3. Ứng dụng hình học của đạo hàm

Phương trình tiếp tuyến với đường cong *y=y(x)* tại điểm (x_0, y_0)

$$y - y_0 = y'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong và đi qua một điểm cho trước bất kỳ $M_1\left(x_1, y_1\right)$

$$y - y_1 = y'\left(x_0\right)\left(x - x_1\right)$$

Trong đó x_0 là nghiệm kép của phương trình

$$y - y_0 = \frac{1}{y'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)$$

4. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Hàm số *y=f(x)* được gọi là chẵn nếu

f(x)=f(-x)

được gọi là lẻ nếu

f(x)=-f(x)

Hàm số tuần hoàn

Hàm số *y=f(x)* được gọi là tuần hoàn nếu có số dương *l* sao cho

$$f(x) = f(x \pm l) = f(x \pm 2l) = ... = f(x \pm kl)$$

Số dương p nhỏ nhất có tính chất trên được gọi là chu kỳ của hàm số.

Hàm số đơn điệu

Hàm số *y=f(x)* được gọi là đơn điệu tăng thật sự (đồng biến) nếu từ $x_1<x_2$ suy ra $f(x_1)<f(x_2)$;

Hàm số *y=f(x)* được gọi là đơn điệu giảm thật sự (nghịch biến) nếu từ $x_{<}x_2$ suy ra $f(x_1)>f(x_2)$;

Nếu ở trên tất cả các dấu < (>) được thay bởi dấu $\leq(\geq)$ thì hàm được gọi là đơn điệu tăng (giảm) theo nghĩa rộng;

Điều kiện để hàm số *y=f(x)* đơn điệu tăng (giảm) trong khoảng xác định là $f'(x) \geq 0 \left(f'(x) \leq 0 \right)$ trong khoảng xác định.

Hàm liên tục

Hàm số *y=f(x)* được gọi là liên tục tại *x=a* nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Cực đại, cực tiểu của một hàm số

Hàm số *y=f(x)* có cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 nếu có một số a dương sao cho $f(x) \leq f(x_0) \left(f(x) \geq f(x_0) \right)$ với

$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$

Nếu x_0 thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Thì x_0 là hoành độ điểm cực đại;

Nếu x_0 thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Thì x_0 là hoành độ điểm cực tiểu;

Hàm lồi

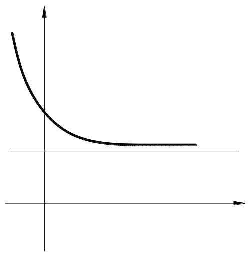
Hàm số $y=f(x)$ gọi là lồi nếu với $\alpha, 0 \le \alpha \le 1$ thì

$$f\left(ax_1 + (1-\alpha)x_2\right) \le af\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right);$$

Hàm số $y=f(x)$ lồi khi và chỉ khi đạo hàm $f'(x)$ tăng theo nghĩa rộng (hoặc tương đương đạo hàm bậc hai $f''(x) \ge 0$)

Điểm uốn

Điểm x_0 là điểm uốn của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $f''(x_0)=0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi đi qua x_0.

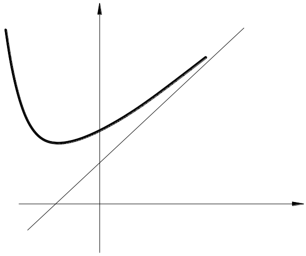


Hình 35: Tiệm cận ngang

Các đường tiệm cận

Tiệm cận ngang (Hình 35): Đường cong *y=f(x)* có tiệm cận ngang *y=b* nếu $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=b$

Tiệm cận xiên (Hình 36): Đường cong *y=f(x)* có tiệm cận xiên *y=ax+b* nếu $\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-ax-b\right]=0$



Hình 36: Tiệm cận xiên

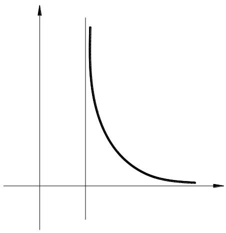
Cách tìm tiện cận xiên *y=ax+b*:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x};$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]$$

Tiệm cận đứng (Hình 37): Đường cong *y=f(x)* có tiệm cận đứng $x=x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$

Trục và tâm đối xứng: Đồ thị hàm số *y=f(x)* nhận đường thẳng *x*=α làm trục đối xứng khi và chỉ khi $f\left(2\alpha-x\right)=f\left(x\right)$

Đồ thị hàm số *y=f(x)* nhận điểm $I\left(\alpha,\beta\right)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi
$$f\left(2\alpha-x\right)=2\beta-f\left(x\right)$$



Hình 37: Tiệm cận đứng

Khảo sát hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$

$$y'=3ax^2+2bx+c;$$
$$y''=6ax+2b.$$

Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$ thì hàm số luôn đồng biến;

Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$ thì hàm số luôn nghịch biến.

$b^2 - 3ac > 0, y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, hàm số có cực đại và cực tiểu.

Các giao điểm với trục hoành: Phương trình $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ luôn có nghiệm thực.

Nếu $b^2 - 3ac \le 0$ hoặc $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ y_{cd} y_{ct} > 0 \end{cases}$ thì phương trình có và chỉ có một nghiệm và đồ thị chỉ cắt trục hoành tại một điểm.

Nếu $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ y_{cd} y_{ct} = 0 \end{cases}$ thì phương trình có một nghiệm đơn và một nghiệm kép; đồ thị cắt và tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm.

Nếu $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ y_{cd} y_{ct} < 0 \end{cases}$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt; đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm khác nhau.

Điểm uốn $\left(-\frac{b}{3a}, y\left(-\frac{b}{3a} \right) \right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \ne 0\right)$

$$y' = 4ax^3 + 2bx;$$
$$y'' = 12ax^2 + 2b.$$

Trong trường hợp $ab \geq 0$ hàm số chỉ có một điểm cực trị là *(0,c)* (cực đại nếu *b<0*, cực tiểu nếu *b>0*).

Trường hợp *ab<0*:

Nếu *b<0*, hàm số có cực đại tại (*0,c*) và hai điểm cực tiểu

$$\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}, -\frac{b^2}{4a} + c\right);$$

Nếu *b>0* hàm số có cực tiểu (*0,c*) và hai điểm cực đại

$$\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

Trong trường hợp này các điểm $\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{6a}}, y\left(\sqrt{-\frac{b}{6a}}\right)\right)$ là các điểm uốn.

Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{a'x+b'}, a', b' \neq 0$

Hàm số xác định với $x \neq -\dfrac{b'}{a'};$

$$y' = \frac{ab' - a'b}{(a'x+b')^2},$$

ab'-a'b=0, hàm số không đổi $y = \frac{a}{a'}$;

ab'-a'b>0 hàm số đồng biến;

ab'-a'b<0 hàm số nghịch biến;

Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{a'}$;

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{b'}{a'}$;

Tâm đối xứng là giao điểm $A\left(-\frac{b'}{a'}, \frac{a}{a'}\right)$ của hai đường tiệm cận.

Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

Tiệm cận xiên: $y = \frac{a}{a'}x + \frac{a'b - ab'}{a'}$;

Tiệm cận đứng $x = -\frac{b'}{a'}$.

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm hai đường tiệm cận.

IX. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

A. TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

1. Định nghĩa

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Trong đó *F'(x)=f(x), C* là hằng số tùy ý.

2. Các tính chất đơn giản nhất

$$\int dx = x + C;$$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k là hằng số;

$$\int (u + v + w + \ldots)dx = \int udx + \int vdx + \int wdx + \ldots$$

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx;$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

3. Tích phân các hàm hữu tỷ

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, (m \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C;$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C, (a \neq b)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-d}{x+a}\right| + C;$$

$$\int \frac{xdx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(a\ln|x+a| - b\ln|x+b|\right) + C, (a \neq b);$$

$$\int \frac{xdx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C;$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctan}\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+a^2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x+b\right)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\ln\frac{|x+b|}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{b}{a}\operatorname{arctan}\frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x+b\right)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\operatorname{arctan}\frac{x}{a} - b\ln\frac{|x+b|}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + C;$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctan}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \left(b^2-4ac<0\right);$$

$$\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

4. Tích phân các hàm vô tỷ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C;$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\left(ax+b\right)^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\left(ax-2b\right)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C;$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2\left(3ax-2b\right)}{15a^2}\left(ax+b\right)^{\frac{2}{3}} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\left(x+c\right)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b-ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right| + C, \left(b-ac>0\right);$$

$$\int \frac{dx}{\left(x+c\right)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}, \left(b-ac<0\right);$$

$$\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)} -$$

$$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\ln\left|\left[\sqrt{a\left(ax+b\right)}+\sqrt{a\left(ax+b\right)}\right]\right| + C, \left(ac>0\right);$$

$$\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)} -$$

$$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{-ac}}\arctan\sqrt{\frac{a\left(cx+d\right)}{c\left(ax+b\right)}} + C, \left(c>0; a<0\right);$$

$$\int x\sqrt{a+bx}dx=-\frac{2\left(2a-3bx\right)\sqrt{\left(a+bx\right)^{3}}}{15b^{2}}+C;$$

$$\int x^{2}\sqrt{a+bx}dx=\frac{2\left(8a^{2}-12abx+15b^{2}\right)\sqrt{\left(a+bx\right)^{3}}}{105b^{3}}+C;$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2\left(2a-bx\right)}{3b^{2}}\sqrt{a+bx}+C;$$

$$\int\frac{x^{2}dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2\left(8a^{2}-4abx+3b^{2}x^{2}\right)}{15b^{3}}\sqrt{a+bx}+C;$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+C,\left(a>0\right);$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C,\left(a<0\right);$$

$$\int\frac{dx}{x^{2}\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}};$$

$$\int\frac{\sqrt{a+bx}dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}};$$

$$\int x^m\sqrt{2ax-x^2}\,dx=-\frac{x^{m-1}\left(2ax+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{m+1}+\frac{\left(2m+1\right)a}{m}\int x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx;$$

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m}+\frac{\left(2m-1\right)a}{m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^m}dx=-\frac{\left(2ax-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(2m-3\right)ax^m}+\frac{m-3}{\left(2m-3\right)a}\int\frac{\sqrt{2ax+x^2}}{x^{m-1}}dx;$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}+C.$$

5. Tích phân của hàm lượng giác

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{2}\cos^3 x - \cos x + C;$$

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C;$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx;$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \cos\sec x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot}\tan x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C;$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C;$$

$$\int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C;$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C;$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \left(m^2 \neq n^2\right);$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C, \left(m^2 \neq n^2\right);$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \left(m^2 \neq n^2\right);$$

$$\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a\sin x + b}{a + b\sin x} + C, \left(a^2 > b^2\right);$$

$$\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left|\frac{b + a\sin x - \sqrt{b^2 - a^2}\cos x}{a + b\sin x}\right| + C, \left(b^2 > a^2\right);$$

$$\int \frac{dx}{a + b\cos} = \pm\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \frac{a\cos x + b}{a + b\cos x} + C, \left(a \geq 0, b < 0\right);$$

$$\int \frac{dx}{a + b\cos} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left|\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}\right| + C, \left(a < b\right);$$

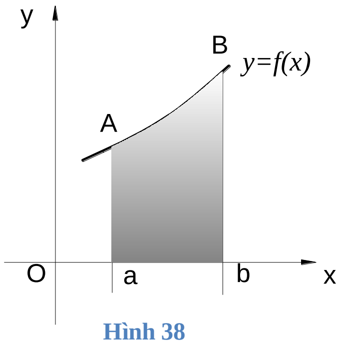
$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x + b\cos x} \right| + C.$$

B. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Trong đó $F'(x)=f(x)$



Hình 38

2. Ý nghĩa hình học của tích phân xác định (Hình 38)

$$\int_a^b g(x)dx = S_{aABb}$$

3. Một số ứng dụng của tích phân xác định

a) *Tính diện tích hình phẳng*

Diện tích của hình giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$ và các đường $y=0$, $x=a$, $x=b$, trong đó y có cùng một dấu với mọi giá trị của x trong khoảng (a, b) là:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (xem Hình 38)}$$

b) *Tính độ dài cung*

Độ dài (s) của một cung của đường cong phẳng $f(x,y)=0$ từ điểm (a,c) đến điểm (b,d) là:

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Nếu phương trình của đường cong *x=f(t), y=g(t)* thì độ dài của cung từ *t=a* đến *t=b* là:

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

c) *Tính thể tích khối tròn xoay*

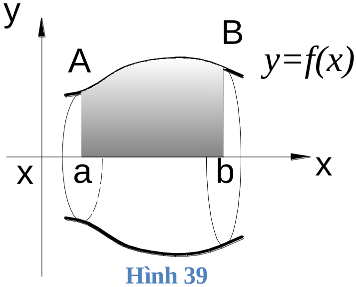
Thể tích của khối tròn xoay được sinh ra do phần đường cong *y=f(x)* trong khoảng *x=a* và *x=b* chuyển động quay xung quanh

- Trục x là $V=\pi\int_a^b y^2dx$
- Trục y là $V=\pi\int_c^d x^2dy$

Trong đó *c* và *d* là các giá trị của *y* tương ứng với các giá trị của *a* và *b* của *x*.

d) *Thể tích tạo bởi tiết diện song song*

Nếu mặt phẳng vuông góc với trục *x* tại điểm (*x,0,0*) cắt vật thể theo một tiết diện có diện tích là *S*(*x*) thì thể tích của phần vật thể trong khoảng *x=a* và *x=b* là:



Hình 39

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

e) ***Diện tích mặt của khối tròn xoay***

Diện tích mặt của vật thể được sinh ra bởi phần đường cong *y=f(x)* trong khoảng *x=a* và *x=b* chuyển động quay

- Đối với trục x là $S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx;$
- Đối với trục y là $S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$

Trong đó *c* và *d* là các giá trị của *y* tương ứng với các giá trị *a* và *b* của *x*.

CHỈ MỤC

V