

Bài 1

NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Khái niệm nguyên hàm

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

ĐỊNH LÝ 1

Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K .

Khi đó

a) Với mỗi hằng số C , hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K .

b) Ngược lại với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K .

2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

1) $\int 0 dx = C, \quad \int dx = \int 1 dx = x + C;$

2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

a) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C;$

3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4) a) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

b) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

5) a) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C;$

b) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C.$

6) a) $\int e^x dx = e^x + C;$

b) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1);$

3. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

ĐỊNH LÝ 2

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

a) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$

b) Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$

4. Bảng nguyên hàm mở rộng :

Định lý: Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó, nếu F là một nguyên của f , tức là:

$$\int f(u) du = F(u) + C \text{ thì: } \int f[u(x)].u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

Hệ quả: Với $u = ax + b (a \neq 0)$, ta có $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

$\bullet \int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + C$	$\bullet \int \cos(ax + b).dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{(ax + b)^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{ax + b} + C$	$\int \sin(ax + b).dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{1}{a} 2\sqrt{ax + b} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	
$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln ax + b + C$	

B. CÁC VÍ DỤ:

Bài 1: Tính $\int f(x) dx$ với:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ b) $f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 - 5}{x}$ c) $f(x) = (x - 1)(x^4 + 3x)$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x\sqrt{x}}$ f) $f(x) = e^x + 4^x$

g) $f(x) = e^x \left(3 - \frac{2e^{-x}}{x^5} \right)$ h) $f(x) = 2^x (3^{2x} + x^2 \cdot 2^{-x})$ i) $f(x) = 3 \cos x - 7 \sin x$

k) $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x$ l) $f(x) = \sin x \cdot \sin 4x$ m) $f(x) = \tan^2 x$

n) $f(x) = \tan^2 x - \cot^2 x$ o) $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ p) $f(x) = \frac{4}{\cos^2 2x}$

q) $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2$

Bài 2: Chứng minh hàm số $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Bài 3: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 3}{x + 1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 4}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$
 d) $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^{100}}$

Bài 4: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = e^x + 3^x$ b) $f(x) = e^x \cdot 3^x$ c) $f(x) = 3^{5x} - 5x^3$
 d) $f(x) = (4^x - 3 \cdot 7^x) 2^x$ e) $f(x) = \frac{3 + e^{5x}}{e^{4x}}$ f) $f(x) = (e^{3x} - 2e^{-3x})^2$

Bài 5: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ c) $f(x) = \cos^4 x$
 d) $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$ e) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ f) $f(x) = \frac{2 + 2 \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
 g) $f(x) = \frac{\sin^3 x - 2}{3 \sin^2 x}$ h) $f(x) = \frac{3 \tan^2 x + 2}{\sin^2 x}$ i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}$

C. TRẮC NGHIỆM:

Dạng 1. TÍNH CHẤT

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số). B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số).
 C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số). D. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.
 B. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).
 C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.
 D. $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.

Câu 3. Kí hiệu $F(y)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(y)$, biết $F(y) = x^2 + xy + C$. Hỏi hàm số $f(y)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(y) = x$. B. $f(y) = y$. C. $f(y) = 2x + y$. D. $f(y) = 3x + y$.

Câu 4. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F(\sin^2 x)$ xác định thì $F(\sin^2 x)$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(\sin^2 x)$. B. $f(\cos^2 x)$. C. $2 \sin x \cdot f(\sin^2 x)$. D. $\sin 2x \cdot f(\sin^2 x)$.

Dạng 2. HÀM ĐA THỨC

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $6x + C$. B. $x^3 + C$. C. $\frac{x^3}{3} + x + C$. D. $x^3 + x + C$.

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $3x^2 + 1 + C$. B. $x^3 + x + C$. C. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $x^4 + x^2 + C$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-3)^4$?

A. $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} + x$. B. $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5}$.

$$C. F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} + 2020.$$

$$D. F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} - 1.$$

Câu 8. Ký hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 1)^2$ và $F(1) = \frac{28}{15}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$A. F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x.$$

$$B. F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C.$$

$$C. F(x) = 4x(x^2 + 1).$$

$$D. F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + 1.$$

Câu 9. Biết rằng xe^x là một nguyên hàm của hàm số $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)e^x$ thỏa mãn $F(0) = 1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

$$A. \frac{5}{2}.$$

$$B. \frac{7}{2}.$$

$$C. \frac{5-e}{2}.$$

$$D. \frac{7-e}{2}.$$

Câu 10. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e .

$$A. F(x) = x^2 + x + e.$$

$$B. F(x) = \cos 2x + e - 1.$$

$$C. F(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

$$D. F(x) = x^3 + x^2 + x + e.$$

Câu 11. Biết rằng $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + 1$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tính tổng $S = a + b + c$.

$$A. S = 2.$$

$$B. S = 3.$$

$$C. S = 4.$$

$$D. S = 5.$$

Câu 12. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x).g(x)$, biết $\int f(x)dx = x + C$,

$$\int g(x)dx = \frac{x^2}{4} + C \text{ và } F(2) = 5.$$

$$A. F(x) = \frac{x^2}{4} + 4. \quad B. F(x) = \frac{x^2}{4} + 5. \quad C. F(x) = \frac{x^3}{4} + 3. \quad D. F(x) = \frac{x^3}{4} + 5.$$

Dạng 3. HÀM PHÂN THỨC

Câu 13. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

$$A. F(3) = \frac{1}{2}.$$

$$B. F(3) = \frac{7}{4}.$$

$$C. F(3) = \ln 2 - 1.$$

$$D. F(3) = \ln 2 + 1.$$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$ là

$$A. \int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C.$$

$$B. \int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C.$$

$$C. \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$$

$$D. \int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C.$$

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ là

$$A. \ln(2x-3) + C. \quad B. \ln(3-2x) + C.$$

$$C. \frac{1}{2} \ln(2x-3) + C.$$

$$D. \frac{1}{2} \ln(3-2x) + C.$$

Câu 16. Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời $f'(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ và $f(0) = 1$.

$$A. f(x) = x + \ln|x+1| + 1.$$

$$B. f(x) = x^2 + \ln|x+1|.$$

$$C. f(x) = 2x + \ln|2x+1| - 1.$$

$$D. f(x) = 2x + \ln|x+1| + 1.$$

Câu 17. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ và thỏa mãn

$$F(-1) = \frac{1}{2}. \text{ Tính } F(2).$$

$$A. F(2) = 4.$$

$$B. F(2) = 2 + \ln 2.$$

$$C. F(2) = 2(1 - \ln 2).$$

$$D. F(2) = 2(1 + \ln 2).$$

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ là

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$ B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$
 C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$ D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

Câu 19. Biết rằng $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2} + 3x$ và thỏa mãn $5F(1) + F(2) = 43$. Tính $F(2)$.

- A. $F(2) = 23.$ B. $F(2) = \frac{45}{2}.$ C. $F(2) = \frac{151}{4}.$ D. $F(2) = \frac{86}{7}.$

Câu 20. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

- A. $F(x) = -\ln|x| - \ln|x-1|.$ B. $F(x) = \ln|x| - \ln|x-1|.$
 C. $F(x) = -\ln|x| + \ln|x-1|.$ D. $F(x) = \ln|x| + \ln|x-1|.$

Câu 21. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ và thỏa mãn $F\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2.$ B. $F(3) = 2 \ln 2.$ C. $F(3) = -2 \ln 2.$ D. $F(3) = -\ln 2.$

Câu 22. Xác định $\int f(x) dx$ biết $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$.

- A. $\int f(x) dx = 2 \ln|x+2| - \ln|x+1| + C.$ B. $\int f(x) dx = 2 \ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$
 C. $\int f(x) dx = 2 \ln|x+1| + \ln|x+2| + C.$ D. $\int f(x) dx = \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + C.$

Câu 23. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x-1}{(2x-1)^2}$ là

- A. $\ln|2x-1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + C.$ B. $\ln|2x-1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + C.$
 C. $2 \ln|2x-1| - \frac{1}{2x-1} + C.$ D. $2 \ln|2x-1| + \frac{1}{2x-1} + C.$

Câu 24. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

- A. $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$ B. $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$
 C. $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$ D. $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

Dạng 4. HÀM MŨ

Câu 25. Nếu $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C.$ B. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C.$
 C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C.$ D. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$ là

- A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$ B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$
 C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$ D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 27. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x}$ là

- A. $4^x + C$. B. $4^x \cdot \ln 4 + C$. C. $\frac{1}{4^x \cdot \ln 4} + C$. D. $\frac{4^x}{\ln 4} + C$.

Câu 28. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{-x}$ là

- A. $-2^{-x} \ln 2 + C$. B. $\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$. C. $-\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$. D. $\frac{2^{-x+1}}{-x+1} + C$.

Câu 29. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ và thỏa mãn $F(0) = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$. B. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 1$. C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$. D. $F(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$.

Câu 30. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1}$ và thỏa mãn $F(0) = \frac{e}{3}$.

Giá trị của $\ln^3 [3F(1)]$ bằng

- A. -8 . B. 27 . C. 64 . D. 81 .

Câu 31. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \cdot e^{x+1}$ là

- A. $e^x \cdot e^{x+1} + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$. C. $2e^{2x+1} + C$. D. $e^{x+1} + e^x + C$.

Câu 32. Nguyên hàm của $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. C. $e^x + 1 + C$. D. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 33. Hàm số $F(x) = e^{x^3} + 2020$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

- A. $f(x) = e^{x^3}$. B. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. C. $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$. D. $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3-1}$.

Câu 34. Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

- A. $f(x) = x^2 + e^x$. B. $f(x) = 3x^2 + e^x$. C. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$. D. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$.

Câu 35. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{-x}(2e^x + 1)$, biết $F(0) = 1$.

- A. $F(x) = 2 + e^{-x}$. B. $F(x) = 2x + e^{-x}$.
C. $F(x) = 2x - e^{-x} + 1$. D. $F(x) = 2x - e^{-x} + 2$.

Câu 36. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2 + e^{3x})^2$ và thỏa mãn

$F(0) = \frac{3}{2}$. Tính $F\left(\frac{1}{3}\right)$.

- A. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 - 8e + 8}{6}$. B. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 + 8e + 8}{6}$.
C. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 - 6e + 6}{8}$. D. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 + 6e + 6}{8}$.

Câu 37. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot e^{2x}$.

- A. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + x + C$. B. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$.
C. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$. D. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$.

Câu 38. Biết rằng hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. -8. B. -6. C. 6. D. 8.

Câu 39. Giả sử $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của $g(x) = x(1-x)e^{-x}$. Tổng $a + b + c$ bằng

- A. -2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 40. Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tích abc bằng

- A. -5. B. -4. C. -3. D. 1.

Dạng 5. HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

- A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$. B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.
 C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$. D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

Câu 42. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

- A. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$. B. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$.
 C. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$. D. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f(0) = \pi$. B. $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.
 C. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi$. D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 44. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1-2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = \cos(1-2x) + 1$. B. $F(x) = \cos(1-2x)$.
 C. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{3}{2}$. D. $F(x) = \frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{1}{2}$.

Câu 45. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$. B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.
 C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$. D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Câu 46. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng $\frac{\pi}{8}$ khi $x = \frac{\pi}{4}$?

- A. $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$. B. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$.
 C. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}$. D. $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ là

- A. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{16} \sin 4x + C$. B. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$.
 C. $\frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$. D. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$.

Câu 48. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$.

A. $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C.$

B. $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x.$

C. $\int \tan^2 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{x}.$

D. $\int \tan^2 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{x} + C.$

Câu 49. Cho nguyên hàm $\int f(x) \, dx = \sin 2x \cos x + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x) = \frac{1}{2}(3 \cos 3x + \cos x).$

B. $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x).$

C. $f(x) = \frac{1}{2}(3 \cos 3x - \cos x).$

D. $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x).$

Câu 50. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$

đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$

B. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$

D. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}.$

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Phương pháp đổi biến số

ĐỊNH LÝ 1

Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f , tức là $\int f(u)du = F(u) + C$ thì

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C. \quad (1)$$

CHÚ Ý

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$; $f[u(x)]$ là $f(u)$ (coi du là vi phân của hàm số $u = u(x)$), nghĩa là $du = d(u(x)) = u'(x)dx$.

Khi đó công thức (1) được viết như sau:

$$\begin{aligned} \int f[u(x)]u'(x)dx &= \int f[u(x)]du(x) = \int f(u)du \\ &= F(u) + C = F[u(x)] + C. \quad (2) \end{aligned}$$

Ta nói đã thực hiện được phép đổi biến $u = u(x)$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

ĐỊNH LÝ 2

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Công thức trên gọi là *công thức lấy nguyên hàm từng phần* (gọi tắt là *công thức nguyên hàm từng phần*) và được viết gọn dưới dạng

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

B. CÁC VÍ DỤ:

Bài 1: Tìm các nguyên hàm sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x}{x^2 + 4} dx & \text{b) } \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx & \text{c) } \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 4} dx \\ \text{d) } \int \frac{4x}{(1 - 2x^2)^2} dx & \text{e) } \int x(x^2 - 4)^4 dx & \text{f) } \int \frac{x^3}{x^8 - 9} dx \\ \text{g) } \int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)} & \text{h) } \int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx & \text{i) } \int \frac{(x + 1)^{2013}}{(3x + 1)^{2015}} dx \end{array}$$

Bài 2: Tìm các nguyên hàm sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x\sqrt{x + 1} dx & \text{b) } \int x^2\sqrt[3]{1 - x} dx & \text{c) } \int 3x\sqrt{7 - 3x^2} dx \\ \text{d) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}} & \text{e) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 1}} & \text{f) } \int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} dx \\ \text{g) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} dx & & \end{array}$$

Bài 3: Tìm các nguyên hàm sau:

- a) $\int \sin^2 x \cos x dx$ b) $\int \sin^3 x dx$ c) $\int \cos^5 x dx$
 d) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ e) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ f) $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$
 g) $\int \sqrt{1 + \cos^2 x} \cdot \sin 2x dx$ h) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ i) $\int \sin^7 x dx$
 j) $\int \frac{dx}{\sin x}$ k) $\int \frac{dx}{\cos x}$ l) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$
 m) $\int \frac{e^{\cot x} dx}{\sin^2 x}$ n) $\int \frac{2^{\tan x} dx}{\cos^2 x}$ o) $\int e^{\sin x + 1} \cos x dx$

Bài 4: Tìm các nguyên hàm sau:

- a) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int \frac{dx}{e^x + 3}$
 d) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx$ e) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ f) $\int \frac{dx}{1 - e^{-x}}$
 g) $\int (x + 1)e^{x^2 + 2x} dx$ h) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$ i) $\int e^x \cdot \cos(3e^x + 1) dx$
 j) $\int \frac{12^x}{16^x - 9^x} dx$ k) $\int \frac{(2 - 3 \ln x)^5}{x} dx$ l) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$
 m) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$ n) $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$ o) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$

Bài 5: Tìm các nguyên hàm sau:

- a) $\int x e^x dx$ b) $\int (2x^2 + x + 1)e^x dx$ c) $\int x \cdot 2^x dx$
 d) $\int x \cdot \sin x dx$ e) $\int x \cdot \sin^2 x dx$ f) $\int x^5 \cdot e^{x^3} dx$
 g) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ h) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$ i) $\int \cos \sqrt{x} dx$

Bài 6: Tìm các nguyên hàm sau:

- a) $\int \ln(x + 2) dx$ b) $\int x^2 \ln(1 + x) dx$ c) $\int x \ln(x^2 + 1) dx$
 d) $\int \ln^2(x + 4) dx$ e) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ f) $\int \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2} dx$

Bài 17: Tìm các nguyên hàm sau:

- a) $\int \sin(\ln x) dx$ b) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx$ c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$
 d) $\int \cos^2(\ln x) dx$ e) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ f) $\int \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$

C. TRẮC NGHIỆM:

Dạng 1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Câu 1. Biết $\int f(u) du = F(u) + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int f(2x - 1) dx = 2F(2x - 1) + C$. B. $\int f(2x - 1) dx = 2F(x) - 1 + C$.
 C. $\int f(2x - 1) dx = F(2x - 1) + C$. D. $\int f(2x - 1) dx = \frac{1}{2}F(2x - 1) + C$.

Câu 2. Cho $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int f(x + 2) dx = x^2 + 7x + C$. B. $\int f(x + 2) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$.

C. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C.$ D. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $\int f(x)dx = 4x^3 + 2x + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int x.f(x^2)dx = 12x^2 + 2x + C.$ B. $\int x.f(x^2)dx = 2x^6 + x^2 + C.$

C. $\int x.f(x^2)dx = 4x^6 + 2x^2 + C.$ D. $\int x.f(x^2)dx = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C.$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x^2 + 1)^9$ là

A. $(x^2 + 1)^{10} + C.$ B. $2(x^2 + 1)^{10} + C.$ C. $-\frac{1}{20}(x^2 + 1)^{10} + C.$ D. $\frac{1}{20}(x^2 + 1)^{10} + C.$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C.$ B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$ là

A. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$ B. $e^{x^2} + C.$ C. $2e^{x^2} + C.$ D. $(2x^2 + 1)e^{x^2} + C.$

Câu 7. Cho $I = \int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$ và $t = \ln x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \int t dt.$ B. $I = \int e^t dt.$ C. $I = \int te^t dt.$ D. $I = \int \frac{e^t}{t} dt.$

Câu 8. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và thỏa mãn

$F(0) = -\ln 2$. Giá trị của $F(1)$ bằng

A. 1. B. $1 - \ln 2.$ C. $1 - \ln(e + 1).$ D. $1 - \ln(e + 2).$

Câu 9. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ và thỏa mãn

$F(e^2) = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$ B. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 3.$

C. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2.$ D. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2.$

Câu 10. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \sqrt{\ln^2 x + 1}$ và

thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $[F(e)]^2$ bằng

A. $\frac{1}{3}.$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$ C. $\frac{1}{9}.$ D. $\frac{8}{9}.$

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $\int \sin^{2020} x \cdot \cos x dx$ là

A. $\frac{\sin^{2021} x}{2021} + C.$ B. $-\frac{\sin^{2021} x}{2021} + C.$ C. $\frac{\cos^{2021} x}{2021} + C.$ D. $-\frac{\cos^{2021} x}{2021} + C.$

Câu 12. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và thỏa

mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $-\frac{1}{3} \ln 2 - 2.$ B. $-\frac{1}{3} \ln 2 + 2.$ C. $-\frac{2}{3} \ln 2 - 2.$ D. $-\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

Câu 13. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ trên $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. $-\frac{1}{2} \ln 2$. B. $\frac{1}{2} \ln 2$. C. $-\ln 2$. D. $-2 \ln 2$.

Câu 14. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sin x} \cos x$ và thỏa mãn $F(\pi) = 5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = e^{\sin x} + 4$. B. $F(x) = e^{\sin x} + C$.
C. $F(x) = e^{\cos x} + 4$. D. $F(x) = e^{\cos x} + C$.

Câu 15. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ và thỏa mãn $F(0) = 2020$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = -e^{\tan x} + 2021$. B. $F(x) = e^{\tan x} + 2019$.
C. $F(x) = -e^{-\tan x} + 2021$. D. $F(x) = e^{-\tan x} + 2019$.

Dạng 2. PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 16. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Giá trị của $F(e^2)$ bằng

- A. 4. B. $-e^2 + 4$. C. $e^2 + 4$. D. $3e^2 + 4$.

Câu 17. Nguyên hàm của hàm $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

- A. $2x^2 \ln x + x^2$. B. $2x^2 \ln x + 3x^2$. C. $2x^2 \ln x + x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}$ là

- A. $\ln(\ln x) + \ln x + C$. B. $\ln x \cdot \ln(\ln x) + C$.
C. $\ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$. D. $\ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln x + C$.

Câu 19. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)e^{-x}$ và thỏa mãn $F(0) = 2020$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = e^{-x} + 2019$. B. $F(x) = xe^{-x} + 2020$.
C. $F(x) = -xe^{-x} + 2020$. D. $F(x) = -xe^x + 2020$.

Câu 20. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$. B. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$.
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$. D. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$.

Câu 21. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ và thỏa mãn $F(\pi) = 2\pi$. Giá trị của biểu thức $T = 2F(0) - 8F(2\pi)$ bằng

- A. 4π . B. 6π . C. 8π . D. 10π .

Câu 22. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos^2 \frac{x}{2}$ và thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $F(\pi)$ bằng

- A. $\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}$. C. $\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}$. D. $\frac{\pi^2}{4} + 1$.

Câu 23. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cos x$ là

- A. $x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + 2C$. B. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.
C. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$. D. $x^2 \sin x + x \cos x - \sin x - C$.

Câu 24. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sin x$ là

- A. $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x + C$. B. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + C$.
C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + C$. D. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$.

Câu 25*. Biết rằng $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C.$

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C.$

C. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

D. $\int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

Bài 3

TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Khái niệm tích phân

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là **tích phân của f từ a đến b** và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Trong trường hợp $a < b$, ta gọi $\int_a^b f(x) dx$ là *tích phân của f trên đoạn $[a; b]$* .

Người ta còn dùng kí hiệu $F(x)|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Như vậy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

2. Tính chất của tích phân

ĐỊNH LÝ

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K . Khi đó ta có

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx;$$

$$4) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$5) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

B. CÁC VÍ DỤ:

Bài 1: Tính các tích phân sau

$$a) \int_1^2 (3x^2 - 2x + 3) dx$$

$$b) \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$c) \int_{-1}^0 x^3(x+1) dx$$

$$d) \int_1^2 \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2} dx$$

$$e) \int_1^2 (x\sqrt{x} - x) dx$$

$$f) \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx$$

g) $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x \sin x dx$ i) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$

Bài 2: Tính các tích phân sau

a) $\int_0^2 |1-x| dx$ b) $\int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$ c) $\int_{-1}^3 (|x| - |x-1|) dx$
d) $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$ e) $\int_0^{\ln 4} |e^{2x} - e^{x+1}| dx$ f) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$

C. TRẮC NGHIỆM:

Dạng 1. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Câu 1. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} và các số thực a , b , c . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy.$
B. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
C. $\int_a^a f(x) dx = 0.$
D. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-1}^1 dx = 1.$
B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx.$
C. Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0.$
D. $\int_a^b k \cdot dx = k(a-b), \forall k \in \mathbb{R}.$

Câu 3. Cho $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$. Khi đó tích phân $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

A. -5. B. -1. C. 1. D. 5.

Câu 4. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Khi đó tích phân $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

A. -8. B. -3. C. 1. D. 12.

Câu 5. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx.$

A. $I = \frac{5}{2}.$ B. $I = \frac{7}{2}.$ C. $I = \frac{11}{2}.$ D. $I = \frac{17}{2}.$

Câu 6. Cho tích phân $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. -3. B. -1. C. 1. D. 3.

Câu 7. Cho $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10$ và $\int_1^2 f(x) dx = 3$. Khi đó $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

- A. -4. B. -1. C. 1. D. 17.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x)dx = 2019$ và $\int_4^3 f(x)dx = 2020$. Tính tích phân

$$I = \int_1^4 f(x)dx.$$

- A. $I = -4039$. B. $I = -1$. C. $I = 1$. D. $I = 4039$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x)dx = 1$ và $\int_1^4 f(t)dt = -3$. Tính tích phân

$$I = \int_2^4 f(u)du.$$

- A. $I = -4$. B. $I = -2$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 4$ và $\int_2^6 f(t)dt = -3$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 [f(v)-3]dv.$$

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 4$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_a^d f(x)dx = 10$, $\int_b^d f(x)dx = 8$ và $\int_a^c f(x)dx = 7$. Tính

tích phân $I = \int_b^c f(x)dx$.

- A. $I = -7$. B. $I = -5$. C. $I = 5$. D. $I = 7$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ và $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

- A. $I = -4$. B. $I = 4$. C. $I = 7$. D. $I = 10$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x)dx = -2$, $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = 7$.

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = 10$. B. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = -2$.
 C. $\int_3^4 f(x)dx = 1$. D. $\int_4^3 f(x)dx = -5$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]dx = 1$ và $\int_1^2 [2f(x) - g(x)]dx = -3$. Tính

tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- A. $I = -\frac{5}{7}$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 1$. D. $I = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x)dx$.

- A. $I = -1$. B. $I = 1$. C. $I = 3$. D. $I = \frac{7}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(0) = 1$. Kí hiệu

$I = \int_0^x f'(t) dt$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $I = f(x) - 1$. B. $I = f(x) + 1$. C. $I = f(x - 1)$. D. $I = f(x + 1)$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(1) = 12$,

$\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính giá trị của $f(4)$.

- A. $f(4) = 5$. B. $f(4) = 9$. C. $f(4) = 19$. D. $f(4) = 29$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; \ln 3]$ và thỏa mãn $f(1) = e^2$,

$\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = 9 - e^2$. Tính giá trị của $f(\ln 3)$.

- A. $f(\ln 3) = -9$. B. $f(\ln 3) = 9$. C. $f(\ln 3) = 2e^2 - 9$. D. $f(\ln 3) = 9 - 2e^2$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$f(3) = m$. Tìm tham số thực m để $\int_1^3 f'(x) dx = 5$.

- A. $m = -4$. B. $m = 4$. C. $m = 5$. D. $m = 6$.

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1) - F(2)$ bằng

- A. $\int_1^2 [-f(x)] dx$. B. $\int_2^1 f(x) dx$. C. $\int_1^2 [-f(x)] dx$. D. $\int_1^2 f(x) dx$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có $1 \leq f'(x) \leq 4$ với mọi $x \in [2; 5]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $-4 \leq f(5) - f(2) \leq -1$. B. $1 \leq f(5) - f(2) \leq 4$.
C. $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$. D. $-12 \leq f(5) - f(2) \leq 3$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos(\pi x)$. Tính $f(4)$.

- A. $f(4) = -1$. B. $f(4) = \frac{1}{2}$. C. $f(4) = \sqrt[3]{12}$. D. $f(4) = 2\sqrt{3}$.

Câu 23*. Đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$ bằng

- A. $\sqrt{1+x^2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. C. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. D. $(x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}$.

Câu 24*. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^x te^{f(t)} dt = e^{f(x)}$.

- A. $f'(x) = 1$. B. $f'(x) = \frac{1}{x}$. C. $f'(x) = x$. D. $f'(x) = x^2 + 1$.

Câu 25*. Đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ ($x > 0$) bằng

- A. $\sin \sqrt{x}$. B. $\sin x$. C. $\frac{2 \sin x}{\sqrt{x}}$. D. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$.

Dạng 2. MỘT SỐ TÍCH PHẦN CƠ BẢN

Câu 26. Hàm số $f(x) = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Giá trị của biểu thức $F(2) - F(0)$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 8. D. 16.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;3]$, thỏa mãn

$\int_0^3 f(x)dx = 4$. Khi đó giá trị của tích phân $I = \int_0^3 (e^{1+\ln f(x)} + 4)dx$ bằng

- A. $3e+14$. B. $14e+3$. C. $4+12e$. D. $12+4e$.

Câu 28. Tìm số thực $a > 1$ để tích phân $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx$ có giá trị bằng e .

- A. $a = \frac{1}{e}$. B. $a = e$. C. $a = \frac{e}{2}$. D. $a = e^2$.

Câu 29. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- A. $\ln 2$. B. $2 \ln 2$. C. $\frac{1}{3} \ln 2$. D. $\frac{2}{3} \ln 2$.

Câu 30. Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{1-2x}$.

- A. $I = -\ln 9$. B. $I = -\ln 3$. C. $I = \ln 3$. D. $I = \ln 9$.

Câu 31. Biết $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a+b = -2$. B. $a+b = 2$. C. $a-2b = 0$. D. $a+2b = 0$.

Câu 32. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính

$S = a + b + c$.

- A. $S = -2$. B. $S = 0$. C. $S = 2$. D. $S = 6$.

Câu 33. Biết $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của

$3a + b + c$ bằng

- A. -2 . B. -1 . C. 2 . D. 1 .

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, thỏa $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và

$f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $\ln 15$. B. $2 + \ln 15$. C. $3 + \ln 15$. D. $4 + \ln 15$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0; +\infty) \setminus \{e\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$,

$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$. Giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ bằng

- A. $2 \ln 2$. B. $\ln 2 + 3$. C. $3 \ln 2 + 1$. D. $3(\ln 2 + 1)$.

Câu 36. Tính tích phân $I = \int_0^{2020} 7^x dx$.

- A. $I = \frac{7^{2020} - 1}{\ln 7}$. B. $I = 7^{2020} - \ln 7$. C. $I = \frac{7^{2021}}{2021} - 7$. D. $I = 2020 \cdot 7^{2019}$.

Câu 37. Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng

- A. $\frac{e-1}{2}$. B. $\frac{e^2-1}{2}$. C. $e^2 - 1$. D. $2(e^2 - 1)$.

Câu 38. Tích phân $\int_1^3 e^{3x+1} dx$ bằng

- A. $\frac{e^3 - e}{3}$. B. $\frac{e^8 - e^2}{3}$. C. $\frac{e^9 - e^3}{3}$. D. $\frac{e^{10} - e^4}{3}$.

Câu 39. Biết rằng $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Tổng $m + p + q$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 10. D. $\frac{22}{3}$.

Câu 40. Biết rằng $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a - 4b$.

- A. $P = -\frac{1}{2}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = \frac{9}{2}$. D. $P = 3$.

Câu 41. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$, biết rằng $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$.

- A. $I = 3$. B. $I = 7$. C. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$. D. $I = 5 + \pi$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$.

Câu 43*. Tính tích phân $I = \int_0^{2019\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

- A. $I = 0$. B. $I = 2\sqrt{2}$. C. $I = 2019\sqrt{2}$. D. $I = 4038\sqrt{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = A \sin(\pi x) + B$ (A, B thuộc \mathbb{R}) thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 4$ và $f'(1) = 2$. Giá trị biểu thức $P = \pi A + B$ bằng

- A. -4 . B. -2 . C. 0 . D. 4 .

Câu 45. Biết rằng tích phân $\int_0^m \cos 2x dx = 0$ với m là tham số. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $m = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- C. $m = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $m = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 46. Biết rằng tích phân $\int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = 0$ với x là tham số. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- C. $x = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 47. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$, biết rằng $f(x) = \begin{cases} 2^{2020x} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2^{-2020x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

- A. 0 . B. $I = \frac{2^{2021} - 2}{2020}$. C. $I = \frac{2^{2021} - 1}{2020 \cdot \ln 2}$. D. $I = \frac{2^{2021} - 2}{2020 \cdot \ln 2}$.

Câu 48*. Tính tích phân $I = \int_0^2 \min(1, x^2) dx$.

- A. $I = \frac{3}{4}$. B. $I = 4$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = -\frac{3}{4}$.

Câu 49*. Tích tích phân $I = \int_0^1 \max\{e^x, e^{1-2x}\} dx$.

A. $I = e - 1$. B. $I = \frac{3}{2}(e - \sqrt[3]{e})$. C. $I = e - \sqrt[3]{e}$. D. $I = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

Câu 50*. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ với a, b là các tham số thực. Biết rằng

$f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} . Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{19}{3}$. C. $\frac{26}{3}$. D. $\frac{25}{3}$.

Dạng 3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN VẬN TỐC

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.

- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

→ từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t = [a; b]$ là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.

- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

Câu 51. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

Câu 52. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- A. 16m. B. 25m. C. 50m. D. 55m.

Câu 53. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1}$ m/s², trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 11m/s. B. 12m/s. C. 13m/s. D. 14m/s.

Câu 54. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu mét?

- A. $\frac{1900}{3}$ m. B. $\frac{2200}{3}$ m. C. $\frac{4000}{3}$ m. D. $\frac{4300}{3}$ m.

Câu 55. Một ô tô đang chạy thẳng đều với vận tốc v_0 (m/s) thì người đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + v_0$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn ô tô di chuyển được 40m thì vận tốc ban đầu v_0 bằng bao nhiêu?

- A. $v_0 = 20$ m/s. B. $v_0 = 25$ m/s. C. $v_0 = 40$ m/s. D. $v_0 = 80$ m/s.

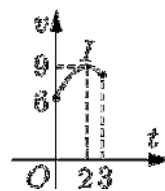
Câu 56. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 8 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 18m/s. B. 24m/s. C. 64m/s. D. 108m/s.

Câu 57. Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh. Từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và a (m/s²) là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500m thì tàu dừng, hỏi gia tốc của tàu bằng bao nhiêu?

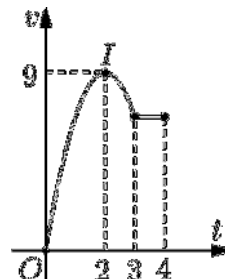
- A. $a = -\frac{200}{13} \text{ m/s}^2$. B. $a = -\frac{100}{13} \text{ m/s}^2$. C. $a = -\frac{40}{3} \text{ m/s}^2$. D. $a = \frac{40}{3} \text{ (m/s}^2)$.

Câu 58. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 24,25\text{km}$. B. $s = 24,75\text{km}$. C. $s = 25,25\text{km}$. D. $s = 26,75\text{km}$.

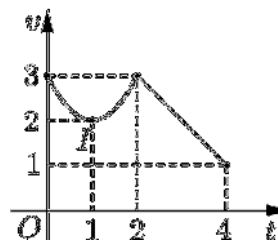
Câu 59. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.



- A. $s = 24\text{km}$. B. $s = 26,5\text{km}$. C. $s = 27\text{km}$.

- D. $s = 28,5\text{km}$.

Câu 60. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(1;2)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một phần đường thẳng. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A. $s = 5,44\text{km}$. B. $s = 8,67\text{km}$. C. $s = 9,27\text{km}$.

- D. $s = 11,35\text{km}$.