

### §3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

#### 1. Định nghĩa

Đường thẳng  $d$  được gọi là vuông góc với mặt phẳng  $(a)$  nếu  $d$  vuông góc với mọi đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(a)$ . Kí hiệu:  $d \perp (a)$ .

#### 2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu  $d$  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong  $(a)$  thì  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(a)$ .

$$d \perp (a) \Leftrightarrow \begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ \text{trong } (a): a \cap b \end{cases}$$

#### Hệ quả:

Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

#### 3. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.

#### 4. Tính chất

**Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

**Tính chất 2:** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với mặt phẳng cho trước.

#### 5. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

Cho  $a, b$  là hai đường thẳng và  $(P), (Q)$  là hai mặt phẳng. Khi đó:

- Nếu  $a \parallel b$  và  $a \perp (P)$  thì  $b \perp (P)$ .
- Nếu  $(P) \parallel (Q)$  và  $a \perp (P)$  thì  $a \perp (Q)$ .
- Nếu  $a \perp (P)$  và  $b \perp (P)$  thì  $a \parallel b$  hoặc  $a \cap b$ .
- Nếu  $a \perp (P)$  và  $a \perp (Q)$  thì  $(P) \parallel (Q)$  hoặc  $(P) \cap (Q)$ .
- Nếu  $a \perp b$  và  $a \perp (P)$  thì  $b \parallel (P)$  hoặc  $b \in (P)$ .
- Nếu  $a \parallel (P)$  và  $b \perp (P)$  thì  $a \perp b$ .

#### 6. Định lý ba đường vuông góc

Cho  $a \perp (P), b \not\perp (a)$  và  $b \not\perp (a)$ . Gọi  $b\phi$  là hình chiếu vuông góc của  $b$  trên  $(a)$ . Khi đó:  $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b\phi$ .

### 7. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu  $d \perp (P)$  thì  $(\tilde{d}, (P)) = 90^\circ$ .
- Nếu  $d \not\perp (P)$  thì  $(\tilde{d}, (P)) = (\tilde{d}, d\phi)$  với  $d'$  là hình chiếu vuông góc của  $d$  trên  $(P)$ .

Chú ý:  $0^\circ \leq (\tilde{d}, (P)) \leq 90^\circ$ .

**Vấn đề 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Từ đó chứng minh hai đường thẳng vuông góc.**

### Bài tập

**Bài 1.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông;  $SA \perp (ABCD)$ .

- Chứng minh:  $CD \perp SD$ .
- Chứng minh: tam giác SBC vuông.
- Chứng minh:  $BD \perp (SAC)$ .
- Vẽ  $AH \perp SD$  tại H. Chứng minh:  $AH \perp (SDC)$ .
- Vẽ  $AK \perp SB$  tại K. Chứng minh: tam giác AKC vuông.

**Bài 2.** Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông tại A;  $SA \perp (ABC)$ . Gọi H là trực tâm tam giác SBC.

- CMR:  $AB \perp (SAC)$ ;  $BC \perp (SAH)$ .
- CMR:  $AH \perp (SBC)$

**Bài 3.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi tâm O,  $SA = SC$ ;  $SB = SD$ .

- Chứng minh:  $SO \perp (ABCD)$ .
- Chứng minh:  $BD \perp (SAC)$ .
- Chứng minh:  $AC \perp (SBD)$ .
- Vẽ  $OI \perp SD$ . Chứng minh:  $SD \perp CI$ .

**Bài 4.** Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông tại B,  $SA \perp (ABC)$ .

- Chứng minh: SBC là tam giác vuông.
- Gọi H, K là hình chiếu của B trên cạnh SC, AC. Chứng minh: tam giác HKC vuông.
- Vẽ AI vuông góc SB tại I. Chứng minh  $AI \perp SC$ .

**Bài 5.** Cho hình chóp S.ABC có  $SB = SC = AB = AC$ .

- Chứng minh:  $SA \perp BC$ .
- Gọi I là trung điểm SA. Chứng minh:  $SA \perp (IBC)$ .

**Bài 6.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật;  $SA \perp (ABCD)$ .

- Vẽ  $AH \perp SD$  tại H. Chứng minh:  $AH \perp (SCD)$ .
- Gọi K là hình chiếu của A trên SB. Chứng minh:  $HK \perp SC$ .

**Bài 7.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi;  $SA \perp (ABCD)$ ; góc  $ABC = 60^\circ$ ; I là trung điểm BC.

- a) Chứng minh:  $BD \perp SC$ .  
 b) Chứng minh:  $BC \perp (SAI)$ .  
 c) Vẽ  $AK \perp SI$  tại K. Chứng minh tam giác AKB vuông.

**Bài 8.** Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều tâm O;  $SA = SB = SC$ . Chứng minh:

- a)  $SA \perp BC$ .  
 b)  $SO \perp (ABC)$ .

**Bài 9.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A với 2 đáy  $AD = 2a$ ;  $BC = a$ ;  $AB = a$ ;  $SA \perp (ABCD)$ .

- a) Tam giác SBC vuông.  
 b) Vẽ  $AH \perp SB$  tại H. Chứng minh:  $AH \perp SC$ .  
 c) Chứng minh:  $CD \perp (SAC)$ .  
 d) Vẽ  $AK \perp SC$  tại K. Chứng minh: Tam giác AKD vuông.  
 e) Vẽ  $AI \perp SD$  tại I. Chứng minh:  $SD \perp (AKI)$ .

**Bài 10.** Cho hình chóp S.ABC có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$ ;  $BC = a\sqrt{2}$ ; gọi I là trung điểm BC.

- a) Chứng minh:  $SA \perp BC$ .  
 b) Chứng minh:  $AI \perp (SBC)$ .  
 c) Gọi D là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh:  $SC \perp (SBD)$  và tam giác SBD vuông.

### Vấn đề 2: Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

*Phương pháp:*

- Tìm giao điểm  $O$  của đường thẳng  $a$  với mặt phẳng  $(P)$ .
- Chọn điểm  $A \in a$  và dựng  $AH \perp (P)$ . Khi đó:  $(\vec{a}, (P)) = \widehat{AOH}$ .

### Bài tập

**Bài 1.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh  $a$ ;  $SA \perp (ABCD)$ ;  $SA = a$ .

- 1) Chứng minh  $CB \perp (SAB)$ .  
 2) Tính góc giữa các đường thẳng và mặt phẳng sau đây:

- a) SC và (SAD)                      b) SB và (SAC)                      c) AC và (SCD)

**Bài 2.** Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $AB \perp (BCD)$  và

$AB = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng và mặt phẳng sau:

- a) AC và (BCD)                      b) AD và (BCD)                      c) AD và (ABC)

**Bài 3.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh  $a$ ,  $SO \perp (ABCD)$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết góc giữa MN và (ABCD) là  $60^\circ$ . Tính góc giữa:

- a) MN và SO                      b) MN và (SBD)

**Bài 4.** Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông tại A,  $BC = a$ ,

$SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính góc giữa SA và (ABC).