

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến

- Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương (vtcp) của đường thẳng Δ nếu \vec{u} có giá cùng phương với Δ .
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến (vtpt) của đường thẳng Δ nếu \vec{n} có giá vuông góc với Δ .

Nhận xét:

- Một đường thẳng xác định khi và chỉ khi ta biết được một điểm mà nó đi qua và một vtcp (hay vtpt) của nó.
- $\vec{u} = a; b$ là vtcp của đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \vec{n} = -b; a$ là vtpt của Δ .

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận vectơ $\vec{u} = a; b \neq \vec{0}$ làm vtcp.

Phương trình tham số (PTTS) của Δ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Cho phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Nếu $a, b \neq 0$ thì phương trình $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = a; b \neq \vec{0}$ làm vtpt.

Phương trình tổng quát (PTTQ) của Δ là:

$$\Delta : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Hay $\Delta : ax + by + c = 0 \quad c = -ax_0 - by_0$

Một số dạng đặc biệt của đường thẳng:

- Đường thẳng $by + c = 0$ là đường thẳng song song hoặc trùng trục Ox.
- Đường thẳng $ax + c = 0$ là đường thẳng song song hoặc trùng trục Oy.
- Đường thẳng $ax + by = 0$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

5. Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

Nếu đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a; 0)$ và $B(0; b)$, với $a, b \neq 0$ thì:

$$\Delta : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Phương trình này được gọi là phương trình đường thẳng Δ theo đoạn chắn.

6. Phương trình đường thẳng theo hệ số góc

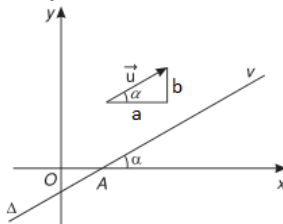
Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (a; b) \neq \vec{0}$ làm vtcp.

Với $a \neq 0$ thì Δ có hệ số góc $k = \frac{b}{a}$.

Phương trình đường thẳng $\Delta : y - y_0 = k(x - x_0)$

Hay $\Delta : y = kx + m$

Lưu ý:



Gọi A là giao điểm của Δ với Ox , Av là tia của Δ nằm bên trên trục hoành và α là góc hợp bởi tia Ax và Av thì hệ số góc của đường thẳng Δ là:

$$k = \tan \alpha$$

7. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Với $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ ta có:

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Lưu ý:

- Nếu $\Delta // d : ax + by + c = 0$ thì Δ có dạng: $ax + by + c' = 0 \quad c \neq c'$.
- Nếu $\Delta \perp d : ax + by + c = 0$ thì Δ có dạng: $bx - ay + c' = 0$ hay $-bx + ay + c' = 0$.
- Hai đường thẳng song song thì hai vtcp và vtpt tương ứng của hai đường thẳng cùng phương với nhau.
- Hai đường thẳng vuông góc thì hai vtcp và vtpt tương ứng của hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Bài tập

Bài 1. Viết phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng Δ :

a) Qua $A(2; -3)$ và có VTCP $\vec{a} = (3; -5)$.

b) Qua A(4; 0) và có VTPT $\vec{n} = -2; 4$.

c) Qua A(-1; 3) và B(4; 2)

d) Qua A(3; -6) và vuông góc với $2x + 3y - 4 = 0$.

e) Qua điểm B(2; -5) và $\perp \Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$

f) Qua điểm C(-3; 7) và $\parallel \Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$

g) Qua giao điểm của $\Delta_1 : 3x - 2y + 5 = 0$, $\Delta_2 : \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ và $\perp \Delta_3 : 4x - 3y = -1$.

h) Qua điểm C(-1; 2) và $\parallel \Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2}$

i) Qua điểm D(3; -6) và $\perp \Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t \end{cases}$

j) Qua điểm E(-5; 2) và $\perp \Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2}$

Bài 2. Viết PTTQ của đường thẳng (d) biết (d) :

a) Qua gốc tọa độ O và $\parallel \Delta : 4x - 3y + 1 = 0$.

b) Qua điểm M(-2; 3) và \parallel trục hoành.

c) Qua điểm M(-2; 3) và \parallel trục tung.

d) Qua 2 điểm M(5; -2) và N(0; -3).

e) Qua điểm M(-1; 5) và \parallel đường thẳng AB biết A(3; 4) và B(4; 2).

f) Qua điểm A(3; 4) và $\perp \Delta : -3x + y - 5 = 0$.

g) Qua giao điểm của $\Delta_1 : 2x + 3y + 5 = 0$, $\Delta_2 : x - 2y + 3 = 0$ và $\parallel \Delta_3 : y = 3x$.

h) Qua điểm N(0; -2) và có hệ số góc $k = -3$.

i) Qua giao điểm của $\Delta_1 : 3x - 2y + 5 = 0$; $\Delta_2 : 2x - 4y + 7 = 0$ và vuông góc với đường thẳng (D): $4x - 3y + 1 = 0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có A(0,3), B(-4,1) và C(8,-1). Viết PTTS, PTCT, PTTQ của đường thẳng chứa :

a) Ba cạnh tam giác

b) Trung tuyến AM

c) Đường cao AH

d) Trung trực cạnh BC

e) Đường trung bình song song với AB

Bài 4. Cho d: $x - y = 0$ và điểm M(2; 1)

a) Viết PTTS, PTCT của đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua điểm M.

b) Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d. Tìm điểm A' đối xứng với M qua d.

- a) $A(6;5)$, $\Delta: 2x + y - 2 = 0$
 b) $A(-3;3)$, $A(2;3)$, $\Delta: x - y = 0$
 c) $A(2;1)$, $A(2;3)$, $\Delta: x = 0$

Bài 18. Cho $d_1: 2x - y - 2 = 0$, $d_2: x + 6y + 3 = 0$ và điểm $M(3; 0)$. Viết PT đường thẳng d qua M và cắt d_1 , d_2 tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 19. Cho tam giác ABC có đường phân giác kẻ từ A , đường trung tuyến kẻ từ B , đường cao kẻ từ C lần lượt có phương trình là: $y = 0$; $4x - y - 1 = 0$; $2x + y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $AB = \sqrt{5}$, $C(-1; -1)$, đường thẳng AB có phương trình $x + 2y - 3 = 0$ và trọng tâm tam giác ABC thuộc đường thẳng $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B .

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$, đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình: $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C , biết điểm $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Bài 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Đường thẳng AB có phương trình:

$x - 2y + 2 = 0$, $AB = 2AD$ và hoành độ điểm A âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó.

Bài 23.

- a) Viết PT đường thẳng (d) biết (d) qua $P(6; 4)$ và tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.
 b) Viết PT đường thẳng (d) biết (d) qua $Q(2; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy tại 2 điểm M, N khác O sao cho $OM + ON$ nhỏ nhất.
 c) Viết PT đường thẳng (d) biết (d) qua $Q(2; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy tại 2 điểm M, N khác O sao cho tam giác OMN có diện tích nhỏ nhất.

Bài 24. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của :

a) $(d_1): 4x + 5y - 6 = 0$ và $(d_2): \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) $(d_1): 2x - 5y - 7 = 0$ và $(d_2): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -9 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c) $(d_1): 6x - 3y - 5 = 0$ và $(d_2): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

d) $(d_1): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 2 - 5t' \\ y = -9 - 2t' \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R})$

Bài 25. Biện luận theo m vị trí tương đối của 2 đường thẳng

- a) $(d_1): mx - y + 1 - m = 0$ và $(d_2): -x + my + 2 = 0$.
 b) $(d_1): (m - 2)x + (m - 6)y + m - 1 = 0$ và $(d_2): (m - 4)x + (2m - 3)y + m - 5 = 0$

Bài 26. Cho $(d_1) : mx + 3y + 3 = 0$ và $(d_2) : 4x + ny - 5 = 0$.

a) Tìm hệ thức giữa m, n để d_1 cắt d_2 ; $d_1 // d_2$

b) Tìm $m; n$ để $d_1 \equiv d_2$