

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng (D): $ax + by + c = 0$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Khoảng cách từ điểm

M đến D là:

$$d(M; D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Vị trí của hai điểm đối với một đường thẳng

Vị trí của hai điểm $M(x_M; y_M)$ và $N(x_N; y_N)$ đối với (D): $ax + by + c = 0$

M, N ở cùng phía đối với D $\hat{U} (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

M, N ở khác phía đối với D $\hat{U} (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3. Đường phân giác của hai đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng $D_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $D_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi D_1 và D_2 có dạng:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

4. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $D_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $D_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Góc giữa hai đường thẳng D_1 và D_2 kí hiệu (\bar{D}_1, D_2) hoặc (D_1, D_2) .

Ta có:

$$\cos(D_1, D_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Lưu ý: $0^\circ \leq (\bar{D}_1, D_2) \leq 90^\circ$.

Bài tập

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: x + my + 7 = 0$ và đường thẳng $d_2: x - 3y + 11 = 0$. Định m để góc giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2 là 45° .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: 2mx + (m - 3)y + 4m - 1 = 0$ và $d_2: (m - 1)x + (m + 2)y + m - 2 = 0$. Định m để:

a) $d_1 \perp d_2$

b) $(d_1, d_2) = 45^\circ$

Bài 3. Tính góc giữa 2 đường thẳng sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = 13 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

và $\Delta_2: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$

và $\Delta_2: 2x + 3y - 1 = 0$

- c) $\Delta_1: x = 5$ và $\Delta_2: 3x + 3y - 1 = 0$
 d) $d_1: x - 3y + 9 = 0$ và $d_2: 2x - y - 2 = 0$
 e) $d_1: (m+1)x + (m-1)y - 7 = 0$ và $d_2: x + my + 1 = 0$

Bài 4. Cho tam giác ABC có 3 cạnh là: $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$; $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ và $x - y - 10 = 0$.
 Chứng minh rằng tam giác ABC cân và tính góc ở đỉnh.

Bài 5. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường thẳng

a) $d_1: 3x - 4y - 9 = 0$; $d_2: 8x - 6y = 2$

b) $d_1: 3x + 4y + 1 = 0$; $d_2: \frac{x - 1}{12} = \frac{y + 1}{-5}$

c) $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x = t' \\ y = 3t' - 2 \end{cases}$

d) $d_1: 2x + 3y - 5 = 0$; $d_2: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 - t \end{cases}$

Bài 6. Cho D ABC có AB: $3x - y + 12 = 0$; BC: $x - 3y - 4 = 0$; AC: $x + 3y - 16 = 0$.

- Viết phương trình đường phân giác trong góc A ; B.
- Viết phương trình đường tròn nội tiếp ABC
- Tìm tọa độ ba đỉnh. Tính diện tích tam giác ABC
- Cho M(-1;1). Chứng minh rằng M ở miền trong tam giác.

Bài 7.

- Tính khoảng cách từ A(-2; 2) đến d: $5x - 12y - 10 = 0$
- Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 1 = 0$ và $d_2: 4x + 6y - 5 = 0$
- Tính bán kính R của đường tròn tâm I(1;-4) tiếp xúc với d: $3x - 4y + 2 = 0$.

Bài 8. Viết phương trình của đường thẳng d biết:

- d song song D: $4x - 3y + 12 = 0$ và cách D một khoảng bằng 5.
- d vuông góc D: $4x - 3y + 12 = 0$ và cách A(1; 2) một khoảng bằng 5.
- Qua A(3; 2) và cách đều 2 điểm B(-2; 2) và C(2; -1).
- Qua A(1; 3) và cách B(2; 0) một khoảng bằng $\sqrt{5}$.

e) Qua A(-2; 0) và tạo với D: $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = t \end{cases}$ một góc bằng 45° .

Bài 9. Cho tam giác ABC biết 3 đỉnh A(2; 4), B(4; 8), C(13; 2).

- Viết PT ba cạnh tam giác. Tính diện tích tam giác ABC.
- Viết PT đường phân giác trong góc A.

Bài 10. Cho đường thẳng D: $3x - 4y + 2 = 0$.

- Viết PTTS của D.
- Viết PT của D dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.
- Tính khoảng cách từ mỗi điểm M(3; 5), N(-4; 0), P(2; 1) tới D và xét xem D cắt cạnh nào của D MNP.

d) Tính các góc hợp bởi D và mỗi trục tọa độ.

Bài 11. Cho $d_1: 2x - y + 5 = 0$, $d_2: 3x + 6y - 1 = 0$ và điểm $M(2; -1)$. Viết PT đường thẳng d qua M và tạo với d_1 , d_2 một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2 .

Bài 12. Cho đường thẳng $D_m: (m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1 = 0$ và 2 điểm $A(2; 3)$, $B(1; 0)$.

a) Chứng minh rằng D_m luôn đi qua một điểm cố định với mọi m .

b) Tìm m để D_m có ít nhất một điểm chung với AB .

c) Tìm m để khoảng cách từ A đến D_m là lớn nhất.